

**МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА**

**МР. ШМ - 43.00.00.000 ПЗ**

**Група ШМ-24-3**

**Гринів Сергій**

**2025**

**Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу**

**Факультет інформаційних технологій**

**Кафедра інженерії програмного забезпечення**

**Гринів Сергій Ігорович**

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК 004.9  
(індекс)

## **МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА**

**Методології та стратегії топологічного аналізу даних для моделювання**

**та симуляції емоцій людини**

(назва роботи)

**Інженерія програмного забезпечення**

(назва освітньої програми)

**121 - Інженерія програмного забезпечення**

(шифр і назва спеціальності)

**Гринів С.І.**

(підпис, ініціали та прізвище здобувача освітнього ступеня)

**Науковий керівник** Процюк Василь Романович, к.т.н., доцент

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

**Допущено до захисту**

**Завідувач кафедри**

доц. Бандура В.В.

(посада) (підпис) (дата) (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль**

доц. Вовк Р.Б.

(посада) (підпис) (дата) (ініціали та прізвище)

Робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Івано-Франківськ – 2025

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Факультет інформаційних технологій

Кафедра інженерії програмного забезпечення

Освітній рівень магістр

Спеціальність 121 – Інженерія програмного забезпечення

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедрою

ІІЗ

доц.

В.В. Бандура

“ 04 ” вересня 2025 р.

# ЗАВДАННЯ

## НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Гриніву Сергію Ігоровичу

(прізвище, ім'я, по-батькові)

**1. Тема магістерської роботи** “Методології та стратегії топологічного аналізу даних для моделювання та симуляції емоцій людини”

керівник проекту (роботи) Процюк Василь Романович, к.т.н., доцент

затверджені наказом закладу вищої освіти від “ 05 ” листопада 2025 р. № 695/7

**2. Строк подання студентом проекту (роботи)** 15 грудня 2025 р.

**3. Вихідні дані до проекту (роботи)** Формальні моделі і методи побудови інформаційних технологій певного класу моделювання та симуляції емоцій людини

**4. Зміст розрахунково - пояснювальної записки(перелік питань, які потрібно розробити)**

1. Дослідження предметної області топологічного аналізу даних для моделювання емоцій

2. Афективні обчислення, методи та методології розпізнавання виразів обличчя

3. Методологія топологічного аналізу даних для візуалізації емоцій людини

4. Імплементация методологій для побудови архітектури системи візуалізації емоцій людини

**5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)**

1. Схема розташування точок, що відповідають представленню міміки обличчя (рис. 1.1)

2. Візуалізація часової шкали TDA (рис. 1.2)

3. Комплексна система візуалізації (рис. 1.3)

4. Демонстрація пояснюваності підходу TDA (рис. 1.4)

5. Схематичний огляд системи HeartBees (рис. 1.5)

## 6. Консультанти розділів проекту (роботи)

Розділ	Консультант	Підпис, дата
Перевірка на плагіат	доц., к.т.н. Вовк Р.Б.	

7. Дата видачі завдання 04 вересня 2025 р.

Керівник

\_\_\_\_\_ (підпис)

Завдання прийняв до виконання \_\_\_\_\_

(підпис)

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Назви етапів магістерської роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір і вивчення літератури по темі магістерської роботи	15.09.2025	виконано
2	Дослідження предметної області топологічного аналізу даних для моделювання емоцій	01.10.2025	виконано
3	Афективні обчислення, методи та методології розпізнавання виразів обличчя	17.10.2025	виконано
4	Методологія топологічного аналізу даних для візуалізації емоцій людини	02.11.2025	виконано
5	Імплементация методологій для побудови архітектури системи візуалізації емоцій людини	19.11.2025	виконано
6	Емпірична оцінка та обчислювальна продуктивність	02.12.2025	виконано
7	Затвердження пояснювальної записки роботи завідувачем кафедри	15.12.2025	виконано

Студент – магістр

\_\_\_\_\_ (підпис)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_ (підпис)

## АНОТАЦІЯ

**Магістерська робота:** 76 с., 26 рис., 6 табл., 40 джерел.

**Тема:** Методології та стратегії топологічного аналізу даних для моделювання та симуляції емоцій людини

**Мета магістерської роботи:** розробка та обґрунтування методологій і стратегій застосування топологічного аналізу даних для моделювання, симуляції та візуалізації емоцій людини на основі морфологічних характеристик обличчя.

**Об'єктом дослідження** є процес моделювання та відтворення емоцій людини за даними мимічних змін обличчя.

**Предметом дослідження** є топологічні методи аналізу даних, зокрема стійкі гомології, діаграми стійкості та топологічні метрики, що використовуються для опису та порівняння поз обличчя.

### **Результати дослідження**

В роботі обґрунтовано вибір топологічного підходу як альтернативи та доповнення до традиційних методів, виходячи з його здатності виявляти інваріантні структурні особливості складних даних, що залишаються стійкими до шумів, оклюзії та варіацій у даних.

### **Висновок**

В результаті розроблено та представлено архітектуру системи для візуалізації, моделювання та симуляції емоцій на основі топологічних характеристик.

**ТОПОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ; СТІЙКІ ГОМОЛОГІЇ; ДІАГРАМИ СТІЙКОСТІ; АФЕКТИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ; МОДЕЛЮВАННЯ ЕМОЦІЙ; ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЕМОЦІЙ; МІМІЧНА ЕКСПРЕСІЯ; ТОПОЛОГІЧНІ МЕТРИКИ; НАБІР ДАНИХ.**

## ABSTRACT

**Master Thesis:** 76 pp., 26 fig., 6 tab., 40 sources.

**Topic:** Methodology and strategies of topological data analysis for modeling and simulation of human emotions

**The purpose of the master's thesis:** development and justification of the methodology and strategy of applying topological data analysis for modeling, simulation and visualization of human emotions based on morphological characteristics of the face.

**The object of the study** is the process of modeling and reproducing human emotions based on data of facial mimic changes.

**The subject of the study** is topological data analysis methods, in particular stable homologies, stability diagrams and topological metrics, which are used to describe and compare facial poses.

### **Research results**

The work justifies the choice of a topological approach as an alternative and addition to traditional methods, which with its ability reveal invariant structural features of complex data that remain resistant to noise, occlusions and variations in the data.

### **Conclusion**

As a result, an architectural system for visualization, modeling and simulation of emotions based on topological characteristics has been developed and presented.

**TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS; SUSTAINABLE  
HOMOLOGIES; SUSTAINABILITY DIAGRAMS; AFFECTIVE  
COMPUTATIONS; EMOTIONS MODELING; EMOTIONS  
VISUALIZATION; MIMIC EXPRESSION; TOPOLOGICAL METRICS;  
DATA SET.**

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ .....	9
ВСТУП.....	10
РОЗДІЛ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТОПОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕМОЦІЙ ЛЮДИНИ .....	14
1.1. Афективні обчислення та застосування топологічного аналізу даних .	14
1.2. Методологія візуально-аналітичного підходу на основі топологічного аналізу даних.....	15
1.2.1. Основна ідея методу топологічного аналізу даних.....	16
1.2.2. Стійкі гомології як центральний інструмент топологічного аналізу даних .....	17
1.2.3. Принцип візуалізації результатів аналізу .....	18
1.3 Обґрунтування вибору методу топологічного аналізу даних.....	21
Висновки до розділу .....	21
РОЗДІЛ 2. АФЕКТИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ, МЕТОДИ ТА МЕТОДОЛОГІЇ РОЗПІЗНАВАННЯ ВИРАЗІВ ОБЛИЧЧЯ .....	23
2.1. Методи розпізнавання виразів облич та специфічність ознак .....	23
2.1.1. Методи розпізнавання виразів .....	23
2.1.2. Регіональна специфічність ознак .....	24
2.2. Огляд літератури щодо візуалізації афективних станів.....	24
2.2.1. Візуалізація афективних станів індивідуума.....	25
2.2.2. Візуалізація колективного афекту .....	25
2.3. Оцінка методології з використанням набору даних BU4DFE.....	28
2.3.1. Характеристики набору даних .....	28
2.3.2. Процес захоплення даних та обробка .....	30
2.4. Методологія топологічного аналізу даних для візуалізації емоцій людини.....	31

2.5. Методи екстракції топології поз обличчя.....	33
2.5.1. Стійкі гомології на основі евклідової метрики на контрольних точках .....	33
2.5.2. Діаграма стійкості та міра важливості.....	34
2.6. Врахування внутрішньої зв'язності точок обличчя та перехід до псевдометрики .....	36
2.7. Підвищення надійності топологічного аналізу даних обличчя шляхом використання псевдометрики ребер .....	40
2.8. Порівняльний аналіз топології поз обличчя.....	41
2.8.1. Несхожість між позами обличчя: топологічні відстані .....	41
2.8.2 Узагальнення топологічної несхожості .....	43
Висновки до розділу .....	44
РОЗДІЛ 3. ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ МЕТОДОЛОГІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ АРХІТЕКТУРИ СИСТЕМИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА СИМУЛЯЦІЇ ЕМОЦІЙ ЛЮДИНИ .....	46
3.1. Реалізація інтерфейсу візуально-аналітичної системи .....	46
3.2. Компоненти візуалізації для інтерпретованості топологічних ознак ...	50
3.2.1. Діаграми стійкості .....	50
3.2.2. Репрезентативні компоненти та цикли .....	51
3.3. Емпірична оцінка та обчислювальна продуктивність.....	52
3.4. Порівняльний аналіз топології та одиниць дій.....	54
3.4.1. Використання одиниць дій у розпізнаванні емоцій .....	58
3.4.2. Співвідношення топології та одиниць дій.....	59
3.5. Кластеризація топології обличчя за індивідуумами .....	61
Висновки до розділу .....	68
ВИСНОВКИ .....	70
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	73

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

AU - Action Unit

TDA - Topological Data Analysis

MDS - Multidimensional Scaling

t-SNEt-distributed Stochastic Neighbor Embedding

UMAP - Uniform Manifold Approximation and Projection

BU4DFE - Binghamton University 4D Face Expression (Dataset)

FACS - Facial Action Coding System

PD - Persistence Diagram

$H_0$  - Zero-th Homology Group

$H_1$  - First Homology Group

## ВСТУП

### **Актуальність теми.**

Сучасні інтелектуальні системи дедалі частіше потребують здатності інтерпретувати емоційний стан людини для забезпечення природної, контекстуально зумовленої та адаптивної взаємодії. У сфері афективних обчислень велика увага приділяється методам аналізу мімічної активності, які дозволяють моделювати емоції на основі морфологічних змін обличчя. Однак традиційні методи комп'ютерного зору й машинного навчання часто мають обмеження щодо інтерпретованості, стійкості до шумів та варіативності експресивності різних індивідуумів. У зв'язку з цим значну наукову цінність становлять методології, здатні виділяти глобальні структурні властивості даних, не обмежуючись локальними або статистичними ознаками.

Топологічний аналіз даних (Topological Data Analysis, TDA) є потужним математичним інструментом, що дозволяє досліджувати структурні властивості складних багатовимірних даних шляхом виявлення стійких гомологічних особливостей. На відміну від класичних підходів, TDA дає змогу отримати інваріантне представлення даних, яке зберігає глобальні властивості та є стійким до деформацій, шумів і неповноти. Це робить його надзвичайно перспективним для задач, пов'язаних із моделюванням емоцій, адже мімічні зміни обличчя мають нелінійну та багаторівневу структуру.

У межах даної роботи було досліджено можливості застосування TDA у контексті аналізу, моделювання та симуляції емоцій, зокрема через візуалізацію стійких топологічних структур, побудову діаграм стійкості та визначення топологічної несхожості між позами обличчя. Значну увагу приділено інтеграції стійких гомологій з даними із набору BU4DFE, що дозволило сформулювати інтерпретовані моделі на основі реальних мімічних змін. Результати дослідження стали основою для побудови інтерфейсу

візуально-аналітичної системи та розроблення архітектури моделювання емоцій з урахуванням топологічних характеристик.

Таким чином, робота пропонує новий підхід до моделювання емоцій людини, який базується на поєднанні математичної строгості топологічного аналізу та практичних інструментів комп'ютерного зору. Запропонована методологія не лише розширює можливості виявлення емоційних станів, а й створює умови для побудови інтерпретованих, стійких і адаптивних систем афективної аналітики.

Актуальність роботи зумовлена зростанням потреби у створенні систем, здатних розпізнавати та моделювати емоції людини з високою точністю та інтерпретованістю. Емоційно-орієнтовані системи використовуються у таких сферах, як соціальні робототехнічні платформи, медичні інформаційні системи, психологічні дослідження, маркетинг, освіта, ігрова індустрія та HSI-технології. У багатьох випадках традиційні алгоритми аналізу емоцій демонструють залежність від зовнішніх факторів, варіацій індивідуальної експресивності та шумів у даних, що знижує їхню надійність і точність.

Методи топологічного аналізу даних набувають все більшої популярності завдяки своїй здатності відображати фундаментальні структурні властивості даних незалежно від геометричних спотворень та локальних флуктуацій. У випадку моделювання емоцій TDA дозволяє відокремити стабільні особливості морфології обличчя, що зберігаються під час прояву певної емоції, та визначити топологічну «віддаль» між різними мімічними позами. Такий підхід створює основу для побудови стійких, інтерпретованих моделей, які можуть функціонувати в умовах реального часу.

Актуальність підсилюється відсутністю достатньо досліджених підходів щодо інтеграції топологічних методів із традиційними технологіями комп'ютерного зору, а також недостатньою кількістю практичних систем, що застосовують TDA для моделювання емоцій людини. Тому розроблення

стратегії поєднання TDA з даними наборів BU4DFE та подальша візуалізація топологічних характеристик є важливим кроком у розвитку інтелектуальних систем нового покоління. У цьому контексті робота заповнює наукову прогалину і відкриває нові напрямки досліджень у сфері афективних обчислень.

**Метою роботи** є розробка та обґрунтування методологій і стратегій застосування топологічного аналізу даних для моделювання, симуляції та візуалізації емоцій людини на основі морфологічних характеристик обличчя.

**Об'єктом дослідження** є процес моделювання та відтворення емоцій людини за даними мімічних змін обличчя.

**Предметом дослідження** є топологічні методи аналізу даних, зокрема стійкі гомології, діаграми стійкості та топологічні метрики, що використовуються для опису та порівняння поз обличчя.

#### **Завдання дослідження**

1. Проаналізувати теоретичні засади афективних обчислень і визначити вимоги до моделей розпізнавання емоцій.
2. Дослідити принципи та методи топологічного аналізу даних, релевантні для моделювання мімічних змін.
3. Виконати аналіз набору даних BU4DFE та здійснити попередню обробку даних для подальшого топологічного моделювання.
4. Реалізувати алгоритми обчислення стійких гомологій та побудови діаграм стійкості для поз обличчя.
5. Побудувати архітектуру системи для інтерпретації та симуляції емоцій.
6. Оцінити ефективність і продуктивність запропонованих методів у реальних експериментальних умовах.

#### **Методи дослідження**

У роботі застосовано методи топологічного аналізу даних (стійкі гомології, діаграми стійкості, топологічні відстані), методи комп'ютерного зору для обробки та сегментації мімічних ознак, алгоритми кластеризації та

порівняльного аналізу, а також методи математичної статистики для оцінки достовірності результатів. Додатково використовуються інструменти візуально-аналітичного моделювання, програмні засоби для інтерактивної візуалізації топологічних структур.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

Наукова новизна роботи полягає у застосуванні топологічного аналізу даних для моделювання емоцій людини з урахуванням стійких структур мімічної експресії. Запропоновано методологію використання стійких гомологій для аналізу поз обличчя, що дозволяє формувати інтерпретовані топологічні моделі емоцій. Створено підхід до визначення топологічної несхожості, який забезпечує новий формат оцінювання відмінностей між емоційними станами.

### **Практичне значення отриманих результатів**

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання розробленої системи для побудови інтерпретованих моделей емоцій у реальних задачах, таких як психологічна діагностика, взаємодія людини з комп'ютером, поведінковий аналіз, робототехніка та розумні інтерфейси. Розроблена методологія може бути використана для створення адаптивних систем, здатних реагувати на емоційний стан користувача та коригувати поведінку на основі топологічних характеристик.

**Структура магістерської роботи.** Представлена робота складається зі вступу, трьох розділів та висновків. Загальний обсяг роботи становить 76 сторінок, і містить 26 рисунків, 6 таблиць, перелік використаних джерел із 40 позицій.

# РОЗДІЛ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТОПОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕМОЦІЙ ЛЮДИНИ

## 1.1. Афективні обчислення та застосування топологічного аналізу даних

Афективні обчислення (Affective Computing) — це галузь, що займається розробкою систем для автоматизованого розпізнавання людських емоційних станів. Сфера застосування таких технологій охоплює освіту (оцінка впевненості та залученості), охорону здоров'я (моніторинг рівня болю) та маркетинг (аналіз реакції споживачів на продукти).

Фундаментальні дослідження у цій сфері розпочалися наприкінці 1960-х років під керівництвом Екмана та Фрізена [2]. Кульмінацією їхньої роботи стала класифікація шести базових емоцій: гнів, відраза, страх, щастя, сум та здивування [3], перелік яких згодом було розширено.

Сучасні дослідження в афективних обчисленнях переважно зосереджені на застосуванні алгоритмів машинного навчання (Machine Learning), натренованих на масивах емоційних даних. Проте, подібно до багатьох рішень на основі нейронних мереж, такі підходи фокусуються на класифікації вхідних даних, часто нехтуючи детальним аналізом самих даних та інтерпретованістю (explainability) процесу прийняття рішень.

Валідація даних в афективних обчисленнях вимагає ефективних засобів візуалізації, розробка яких пов'язана з низкою викликів. Першочерговою проблемою є значний обсяг даних, що отримуються за допомогою високошвидкісної відеозйомки. Попередні дослідження частково вирішили це питання шляхом редукції даних до 83 контрольних точок (landmark points), динаміка яких відстежується у часі (рис. 1.1).

Незважаючи на це, задача залишається нетривіальною через наступні фактори:

- Темпоральна динаміка. Емоційні патерни розгортаються протягом тривалих проміжків часу, представлених послідовністю змін позицій контрольних точок.

- Варіативність тривалості. Значущі патерни можуть мати різну тривалість, що ускладнює їх вирівнювання та порівняння.

- Співвідношення сигнал/шум. Зміни координат контрольних точок часто є мікроскопічними (subtle) та спотвореними шумом, що виникає в процесі їх автоматичного вилучення, що ускладнює візуальне спостереження.

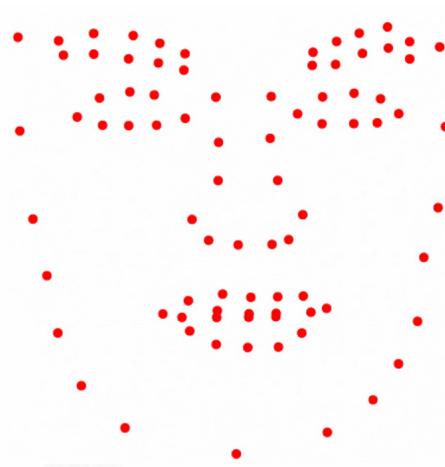


Рис. 1.1. Схема розташування контрольних точок, що відповідають представленню міміки обличчя

На рисунку 1.1 подано схему розташування 83 контрольних точок, що відповідають анатомічним зонам очей, брів, носа, рота та лінії щелепи, які використовуються для дискретного представлення міміки обличчя в конкретний момент часу.

## **1.2. Методологія візуально-аналітичного підходу на основі топологічного аналізу даних**

У цій роботі представлено візуально-аналітичний підхід, що використовує топологічний аналіз даних (Topological Data Analysis — TDA)

для дослідження емоційних патернів як з урахуванням часового фактору, так і без нього. Застосування TDA дозволяє фіксувати та відстежувати топологічну «форму» конфігурації контрольних точок обличчя в динаміці, забезпечуючи стійкість до шумів.

### *1.2.1. Основна ідея методу топологічного аналізу даних*

Топологічний аналіз даних – це міждисциплінарний напрямок, що поєднує методи топології (розділу математики, який вивчає властивості простору, що зберігаються при неперервних деформаціях, таких як розтягування чи згинання) із методами аналізу даних. Головна мета TDA полягає у виявленні прихованої форми (shape) або топологічної структури у високорозмірних та зашумлених масивах даних. TDA оперує з якісними характеристиками даних, які не змінюються при малих збуреннях, що робить його надзвичайно стійким до шуму, на відміну від багатьох традиційних статистичних методів.

Замість того, щоб аналізувати окремі точки даних, TDA розглядає топологічний простір, який вони утворюють.

1. Створення геометричного об'єкта. З набору точок даних (наприклад, контрольні точки обличчя) TDA спочатку будує сімейство вкладених геометричних об'єктів, відомих як симпліціальні комплекси (simplicial complexes). Найпоширенішим є Vietoris–Rips complex. Цей комплекс створюється шляхом з'єднання точок, відстань між якими менша за певний радіус  $\epsilon$ .

При малому  $\epsilon$ , ми маємо лише окремі точки. Зі збільшенням  $\epsilon$  точки починають з'єднуватися ребрами (1-симплексами), утворюючи трикутники (2-симплекси) і далі тетраедри (3-симплекси).

Таким чином, дані перетворюються на низку геометричних форм.

2. Аналіз гомології. На цьому геометричному об'єкті застосовується теорія гомологій. Гомологія вимірює та класифікує "дірки" або "порожнини" у просторі даних.

-  $H_0$  (гомологія нульового порядку) - вимірює компоненти зв'язності (окремі кластери).

-  $H_1$  (гомологія першого порядку) вимірює цикли або тунелі (як дірка у бублику). У контексті обличчя це можуть бути замкнуті кільця, утворені точками навколо рота чи ока.

-  $H_2$  (гомологія другого порядку) вимірює порожнини (як порожнина у сфері).

### 1.2.2. *Стійкі гомології як центральний інструмент топологічного аналізу даних*

Стійкі гомології — це центральний інструмент TDA, який дозволяє відстежувати, як топологічні ознаки (дірки) народжуються та помирають у міру збільшення радіуса  $\epsilon$ .

#### 1. Процес Фільтрації

Замість того, щоб обирати єдине значення  $\epsilon$ , стійкі гомології аналізують всю послідовність симпліціальних комплексів, побудованих для кожного  $\epsilon$  від 0 до нескінченності. Цей процес називається фільтрацією.

- Народження (b): момент (значення  $\epsilon$ ), коли топологічна ознака (наприклад, цикл) вперше з'являється у комплексі.

- Смерть (d): момент (значення  $\epsilon$ ), коли ознака зникає (наприклад, коли дірка заповнюється новим симплексом).

#### 2. Діаграми стійкості (Persistence Diagrams)

Результати стійких гомологій візуалізуються за допомогою діаграм стійкості. Кожна топологічна ознака (дірка, цикл, компонент) представлена точкою (b,d) на площині. Вісь X — значення  $\epsilon$ , при якому ознака народилася (b), вісь Y — значення  $\epsilon$ , при якому ознака померла (d). Діагональна лінія  $y=x$  служить точкою відліку.

#### 3. Міра стійкості (Persistence)

Стійкість ознаки визначається як різниця між моментом її смерті та народження:  $Стійкість = d - b$

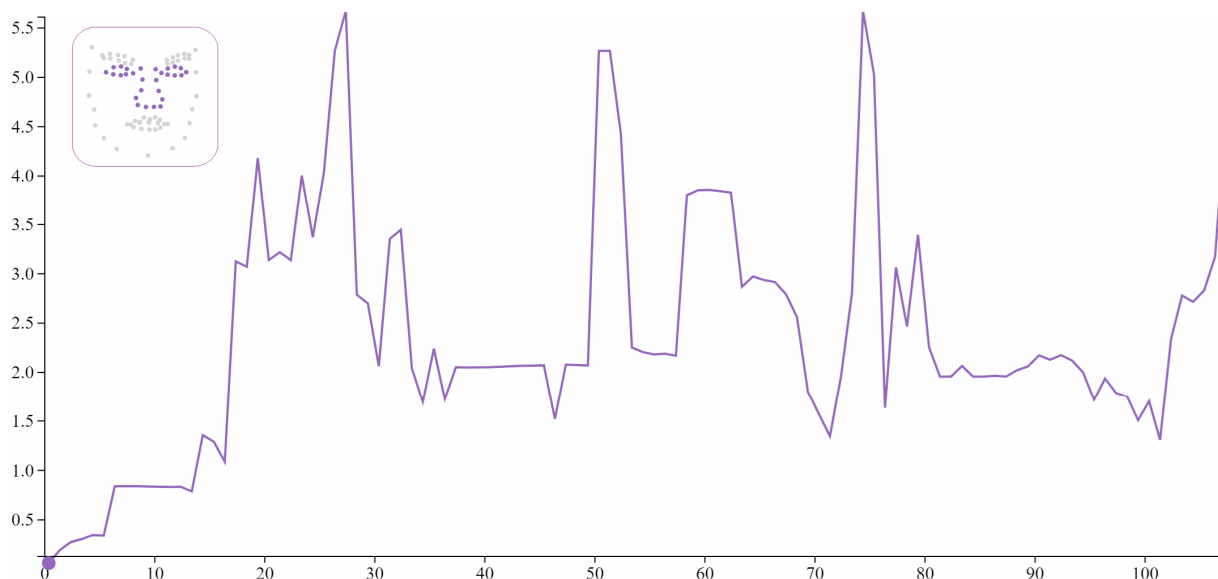
Ознаки, які існують протягом тривалого інтервалу фільтрації (велике значення  $d - b$ ). На діаграмі стійкості ці точки знаходяться далеко від діагоналі ( $y = x$ ). У контексті обличчя це може бути постійний вигин брів, характерний для певної емоції. Ознаки, які швидко народжуються і швидко помирають (мале значення  $d - b$ ). Ці точки знаходяться близько до діагоналі ( $y=x$ ). Вони, як правило, є артефактами шуму вимірювань.

Таким чином, стійкі гомології надають автоматичний та математично обґрунтований метод для відділення структурного сигналу від шуму у складних даних, що є критично важливим для аналізу тонких рухів контрольних точок обличчя.

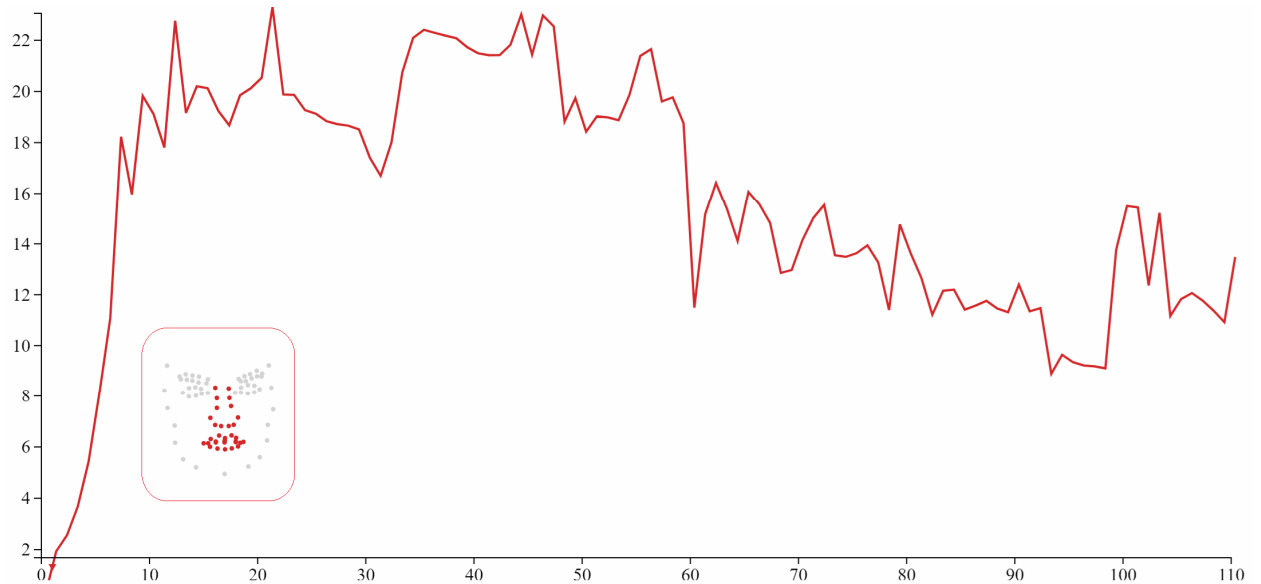
### 1.2.3. Принцип візуалізації результатів аналізу

Система візуалізації представляє результати аналізу через:

- часові шкали (Timelines) для відстеження змін топології у часі (рис. 1.2).
- діаграми розсіювання (Scatterplots) для аналізу розподілу топологічних ознак (рис. 1.3).
- просторові представлення - візуалізація безпосередньо на основі контрольних точок (рис. 1.3 та 1.4).



а) Топологія зон очей та носа (суб'єкт F001, емоція "Відраза")



б) Топологія зон носа та рота (суб'єкт F001, емоція "Страх")

Рис. 1.2. Візуалізація часової шкали TDA. По осі абсцис відкладено час, по осі ординат — топологію відносної відстані

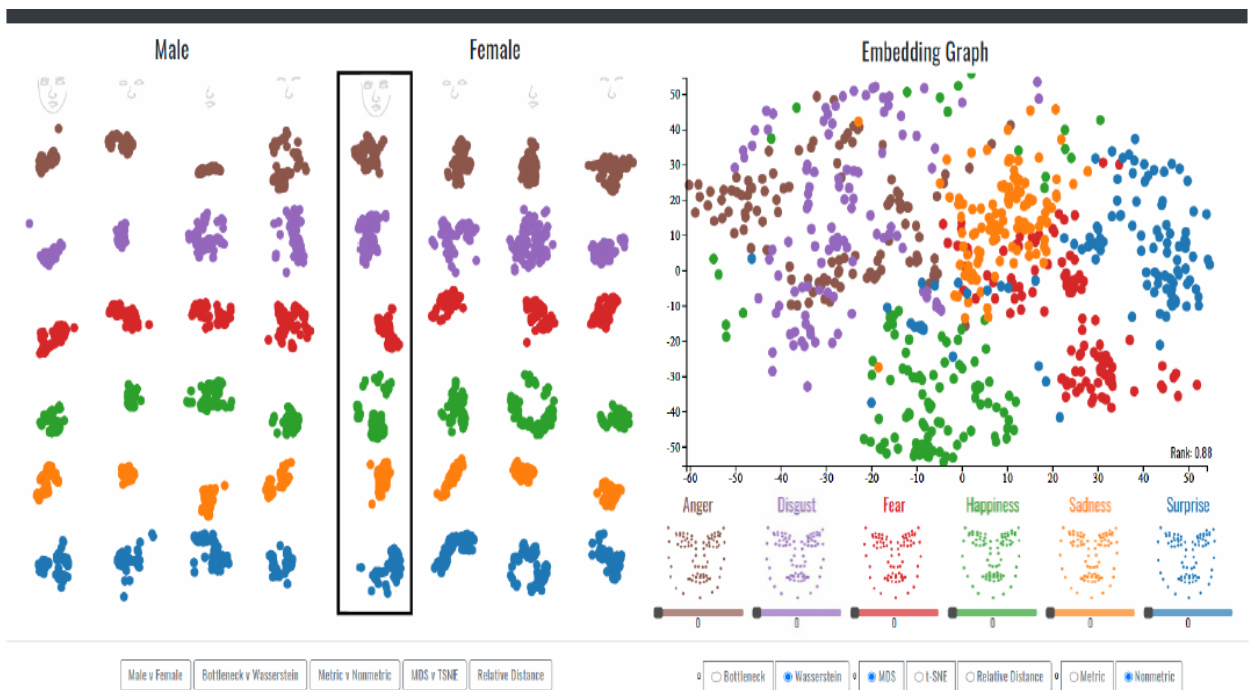


Рис. 1.3. Комплексна система візуалізації, що включає малі множинні графіки (small multiples), діаграму розсіювання топологічних ознак та просторове відображення контрольних точок

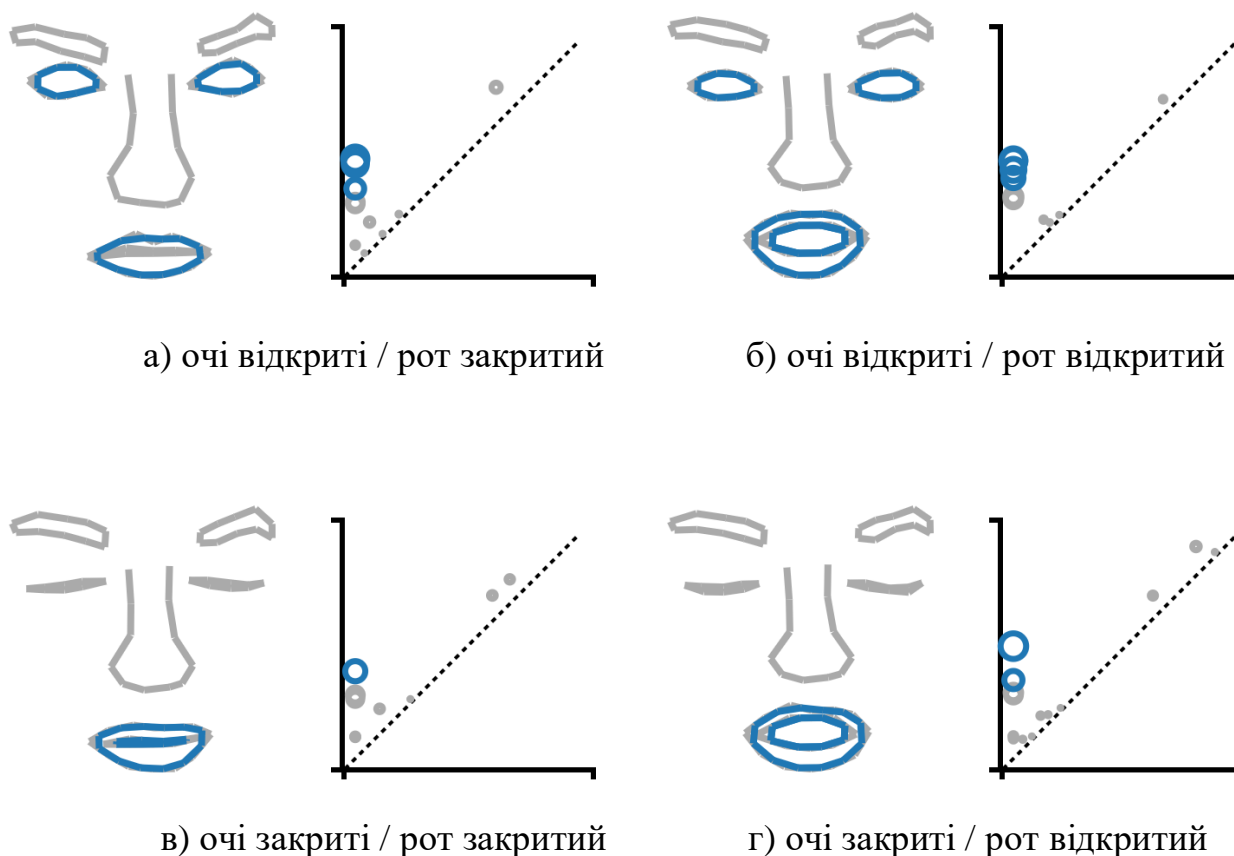


Рис. 1.4. Демонстрація пояснюваності підходу TDA на прикладі чотирьох поз емоції "Здивування" (суб'єкт F001)

На рисунку 1.4 для кожної пози наведено діаграми стійкості (Persistence Diagrams), де кожна точка представляє цикл. Відстань точки від діагоналі корелює з важливістю ознаки, що дозволяє пояснити відмінності між позами та ідентифікувати контрольні точки, які сформували ці топологічні особливості.

Ці інтерфейси дозволяють проводити моніторинг рухів обличчя, порівняльний аналіз емоцій та індивідуальних особливостей суб'єктів, а також забезпечують інтерпретованість ознак, виявлених у даних. Гіпотеза полягає в тому, що кореляція результатів TDA з результатами класифікаторів машинного навчання (навчених на інтенсивності одиниць дій — Action Unit Intensity) дозволить пояснити роботу "чорної скриньки" нейромереж через топологічні характеристики.

### **1.3 Обґрунтування вибору методу топологічного аналізу даних**

Доцільність використання TDA для вирішення поставленої задачі зумовлена застосуванням апарату стійких гомологій (persistent homology).

Цей метод має чотири ключові переваги:

1. Математична строгість.

Стійкі гомології мають надійне теоретичне підґрунтя, що гарантує валідність та пояснюваність вихідних даних.

2. Геометрична релевантність.

Метод виділяє групи гомологій, які в контексті аналізу обличчя інтерпретуються як компоненти зв'язності та цикли/тунелі. Ці фундаментальні форми корелюють з геометричними особливостями міміки.

3. Багато масштабність.

Групи гомологій витягуються одночасно в декількох масштабах без необхідності евристичного задавання порогових значень. Це дозволяє фіксувати всі топологічні структури без втручання дослідника.

4. Фільтрація шуму.

Метод класифікує ознаки за їхньою важливістю за допомогою міри, що називається стійкістю (persistence). Це дозволяє автоматично відокремлювати значущий топологічний сигнал від випадкового шуму.

### **Висновки до розділу**

У першому розділі було здійснено системне дослідження теоретичних та методологічних засад топологічного аналізу даних у контексті моделювання емоцій людини. Розглянуті концепції афективних обчислень продемонстрували, що сучасні підходи до інтерпретації емоційних станів потребують методів, здатних виявляти структурні та інваріантні ознаки у високовимірних даних. Детальний аналіз ідеї топологічного моделювання показав, що стійкі гомології є універсальним інструментом для визначення

стійких патернів, які зберігаються незалежно від локальних варіацій. Було з'ясовано, що топологічне представлення даних дозволяє оцінювати глобальну геометрію мимічних конфігурацій, що є важливим для фіксації морфологічних особливостей емоцій. Принципи візуалізації, зокрема діаграми стійкості, виявилися ефективними для формування інтерпретованих моделей, які забезпечують прозорість аналітичного процесу. Аналіз наявних методологічних підходів підтвердив, що TDA поєднує математичну строгість із практичною цінністю у виявленні важливих структур даних. Обґрунтування вибору топологічного методу засвідчило його здатність адаптуватися до різних типів вхідних даних та працювати без суттєвих припущень щодо їхніх розподілів. Розділ також продемонстрував, що TDA може слугувати ефективною альтернативою традиційним алгоритмам, які часто зосереджуються лише на локальних характеристиках зображень.

## **РОЗДІЛ 2. АФЕКТИВНІ ОБЧИСЛЕННЯ, МЕТОДИ ТА МЕТОДОЛОГІЇ РОЗПІЗНАВАННЯ ВИРАЗІВ ОБЛИЧЧЯ**

Галузь афективних обчислень (Affective Computing) має міждисциплінарне застосування, охоплюючи такі різноманітні сфери, як медицина, індустрія розваг та системи безпеки. Ключовою підгалуззю є розпізнавання виразів обличчя, яке фокусується на автоматизованому виявленні афективних станів суб'єктів.

### **2.1. Методи розпізнавання виразів облич та специфічність ознак**

#### *2.1.1. Методи розпізнавання виразів*

Незважаючи на успіхи в розпізнаванні виразів на 2D-зображеннях, ці підходи залишаються вразливими до проблеми оклюзії (перекриття), спричиненої, наприклад, поворотом голови. З огляду на це, подальший аналіз зосереджений на репрезентативних методах, що використовують 3D-дані для підвищення стійкості систем.

Розглянемо репрезентативні 3D та 4D підходи.

Для підходу геометричного аналізу розроблено модель для локалізації точок у м'язових регіонах обличчя. Як ознаки екстрагувалися координати, нормалі поверхні та індекс форми. Для класифікації виразів використовувався метод опорних векторів (Support Vector Machine, SVM).

Для часово-просторового аналізу запропоновано метод для 4D-розпізнавання (3D-геометрія + час), який продемонстрував ефективність у розрізненні складних емоцій (наприклад, гніву та суму). Метод екстрагував послідовності локальних ділянок із послідовних 3D-відеокадрів. Ці ділянки представлялися за допомогою 3D дискретного косинусного перетворення (3D Discrete Cosine Transform), а для фінального розпізнавання використовувався класифікатор найближчого сусіда (Nearest Neighbor classifier).

Для класифікації на основі многовидів використовувався підхід, що базується на многовидах (manifold-based classification). Обличчя дискретизувалося шляхом екстракції локальної геометрії як коваріаційних регіонів. Ці регіони, у поєднанні з класифікатором SVM, застосовувалися для розпізнавання виразів.

### *2.1.2. Регіональна специфічність ознак*

Нещодавні дослідження підкреслюють, що важливість різних регіонів обличчя для розпізнавання емоцій є неоднорідною:

#### 1. Сегментація обличчя.

Встановлено, що сегментація, сфокусована на ділянках навколо очей та рота, суттєво покращує точність розпізнавання виразів.

#### 2. Динамічна важливість.

Додатково ілюстровано, що ступінь важливості окремих ділянок варіюється залежно від конкретної емоції та навіть від індивідуума. Наприклад, для одного суб'єкта емоція щастя була найбільш асоційована з ознаками правого ока та брови, тоді як збентеження — з ознаками лівого ока та брови.

Цей емпіричний висновок щодо регіональної специфічності має вирішальне значення і буде використаний при розробці дизайну нашої візуалізації шляхом фокусування на конкретних підмножинах лицьових ознак.

## **2.2. Огляд літератури щодо візуалізації афективних станів**

У спільноті, присвяченій візуалізації даних (Data Visualization), кількість досліджень у сфері афективних обчислень була обмеженою. Існуючі роботи зосереджувалися переважно на візуалізації самого афективного стану (тобто виведення класифікатора, представленого в термінах валентності та збудження), а не на інспекції вхідних даних, таких як

контрольні точки обличчя, які використовуються алгоритмами афективних обчислень.

### *2.2.1. Візуалізація афективних станів індивідуума*

Ранні роботи у візуалізації афекту включали використання гліфогового представлення Самооціночного Манекена (Self-Assessment Manikin, SAM) [7]. SAM є стандартним інструментом для кількісного вимірювання задоволення (valence), збудження (arousal) та домінування афективного стану. Наступні підходи зосереджувалися на розробці інтерфейсних елементів (віджетів) для передачі емоційного стану:

1. Рекомендації на основі віджетів [9]. Автори описали рекомендації для відображення афективних станів за допомогою віджетів, які використовували концепцію "ароматів емоцій" (emotion scents). Це були кольорові карти зі змінним відтінком, де, наприклад, червоний та зелений кольори відповідали негативній та позитивній валентності відповідно.

2. Зворотний зв'язок у реальному часі [10]. Ця система була однією з перших, що забезпечувала користувачам сенсорних дисплеїв миттєвий зворотний зв'язок щодо їхньої валентності та збудження.

3. Гліфи для ігрового досвіду [11]. Нещодавнє дослідження комбінувало принципи SAM та "ароматів емоцій" для створення єдиного гліфа, що одночасно відображає валентність та збудження. Робота була спрямована на підвищення усвідомлення гравцями та розробниками відеоігор емоцій, викликаних певним ігровим сценарієм.

4. Часові візуалізації [13]. Для візуалізації афекту протягом тривалих періодів часу, Affect Aura надавала інтерфейс, що дозволяв користувачам рефлексувати над своїми емоційними станами в часі.

### *2.2.2. Візуалізація колективного афекту*

Окремий напрямок досліджень був присвячений візуалізації афективного стану множини індивідуумів:

- Спільна робота. Використання віртуальних агентів для відображення емоційного стану учасників у спільному робочому середовищі [11].

- Навчальне середовище. Розробка візуально-аналітичних інтерфейсів для моніторингу емоційного стану учнів у класі [14].

- Колективний афект [15]. Автори створили систему Heart Bees для візуалізації афекту натовпу на основі фізіологічних даних. Інтерфейс використовував абстрактну поведінку зграї (flocking behavior) для демонстрації колективного емоційного стану групи.

Для інтеграції сенсорів серцевого ритму (рис. 2.1) представлено можливість отримання, обробки та аналізу фізіологічних даних із розумних годинників.

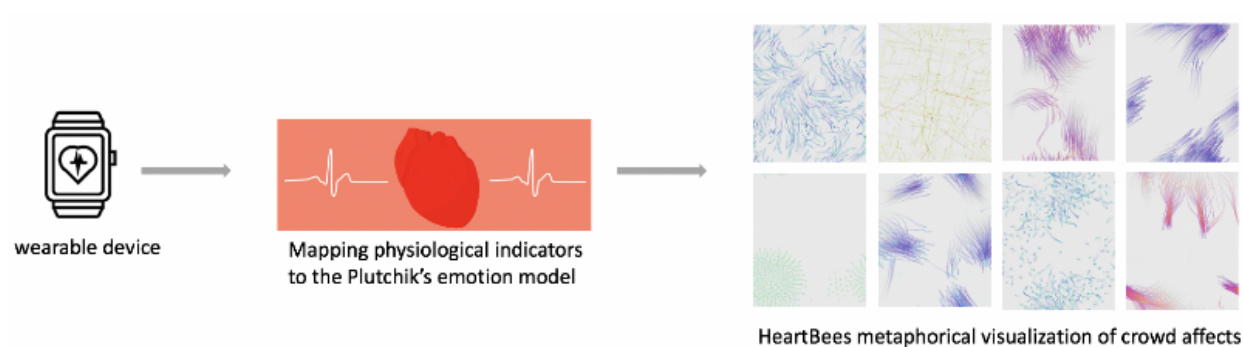


Рис. 2.1. Схематичний огляд системи HeartBees

Фізіологічні дані, отримані з носіїв (wearable devices), відображаються у багатовимірну модель емоцій, яку, у свою чергу, HeartBees трансформує в метафоричну візуалізацію зграї птахів.

На додаток до параметрів моделі, веб-додаток HeartBees надає користувачам можливість керувати естетичними параметрами візуалізації (рис. 2.2). Надихаючись фрактальними патернами, що спостерігаються в природі та психологією кольору дана візуалізація кодує ці патерни у кольорових об'єктах Voids.

Зокрема, користувач може контролювати довжину та ширину мазка (stroke length and stroke width) Voids (рис. 2.2 а), створюючи таким чином

аналогію між рухами Voids і складними патернами, властивими природі. Попередні дослідження показали, що фрактальні патерни є естетично привабливими та сприяють зниженню рівня стресу.

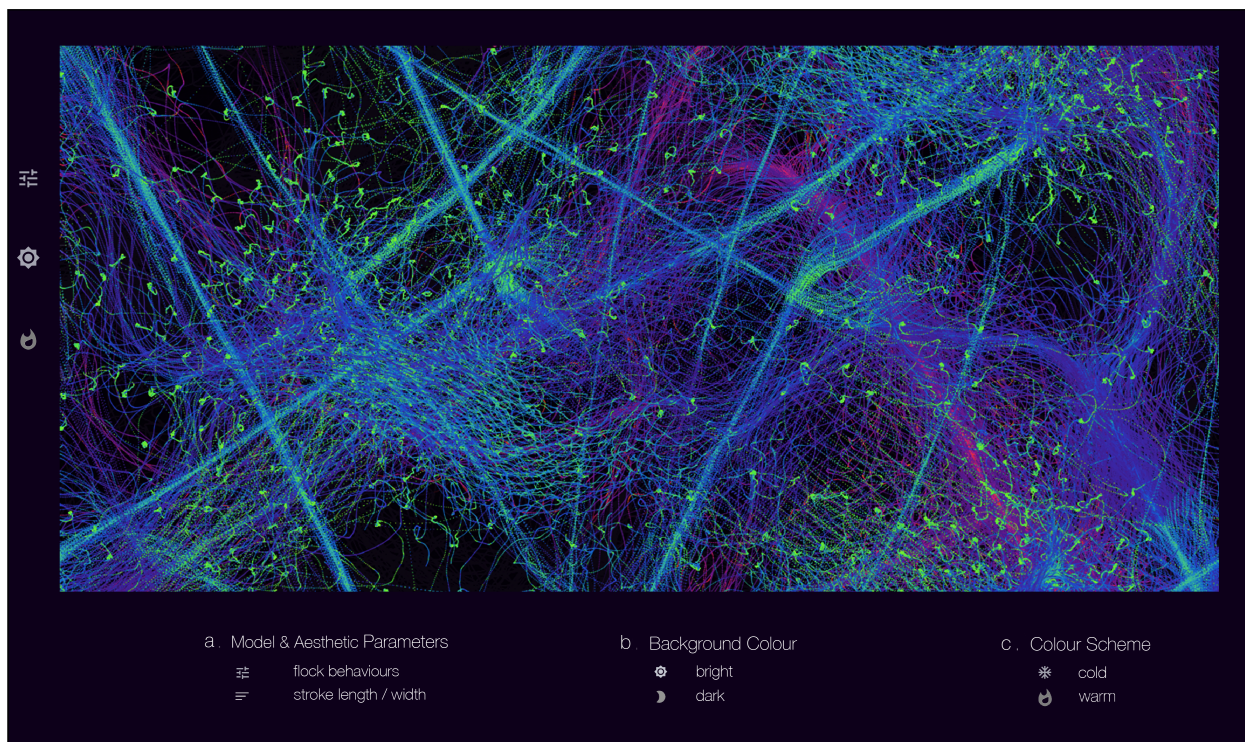


Рис. 2.2. Користувацький інтерфейс HeartBees

Естетичні параметри (тобто довжина та ширина мазка), колір фону полотна (тобто світлий і темний) та колірна схема Voids (тобто холодна та тепла) можуть бути налаштовані вручну. Приклад візуалізації HeartBees було згенеровано, встановивши довжину мазка на 100, а ширину мазка на 30. Для Voids, відображених на полотні з темним фоном, використовувалися як холодна, так і тепла колірні схеми.

Довжина мазка (Stroke Length) описує слід, який залишають Voids з плином часу. Вище значення призводить до довшого продовження світлового променя. При встановленні довжини мазка на рівень 100, на полотні зберігаються всі траєкторії руху.

Ширина мазка (Stroke Width) описує товщину кольорових мазків фарби, які окреслюють рух Voids.

Крім того, користувачі можуть змінювати колір фону полотна, на якому відображаються Voids (рис. 2.2 b). Спираючись на принципи психології кольору, автори прагнули надати універсальні варіанти забарвлення. Доступні дві опції: а) темний фон (темно-синій колір) та б) світлий фон (біло-сірий колір).

Також, колірну схему Voids можна встановити на холодну, теплу або комбінацію обох (рис. 2.2 c). Тепла палітра включає комбінації помаранчевого, червоного та жовтого кольорів, тоді як холодна палітра складається із зеленого, синього, індиго та фіолетового кольорів.

На відміну від усіх вищезгаданих підходів, які зосереджувалися на візуалізації результату класифікації (тобто афективного стану), це дисертаційне дослідження концентрується на використанні Топологічного Аналізу Даних (TDA) та візуалізації для інспекції вхідних даних (контрольних точок), які слугують основою для алгоритмів класифікації емоційних станів. Таким чином, основна увага зміщується з виведення класифікатора на вхідні дані для забезпечення інтерпретованості та валідації.

### **2.3. Оцінка методології з використанням набору даних BU4DFE**

Для емпіричної оцінки запропонованого підходу використовується набір даних 3D виразів обличчя BU4DFE. Цей набір даних є загальновизнаним і широко застосовується для вирішення різноманітних завдань, включаючи: розпізнавання виразів, реконструкцію 3D-форми, відстеження обличчя та розпізнавання обличчя.

#### *2.3.1. Характеристики набору даних*

Набір даних 3D виразів обличчя BU4DFE охоплює 101 суб'єкта (58 жінок та 43 чоловіки) віком від 18 до 45 років. Вибірка є етнічно різноманітною, включаючи представників європеїдної, афроамериканської, азіатської та іспаномовної груп.

Кожна модальність містить шість базових емоцій: гнів, відраза, страх, щастя, сум та здивування.

Кожна відеопослідовність фіксує поступове наростання виразу від нейтрального стану до низької і далі до високої інтенсивності, після чого відбувається повернення до нейтрального стану. Тривалість кожної відеопослідовності становить 3–4 секунди.

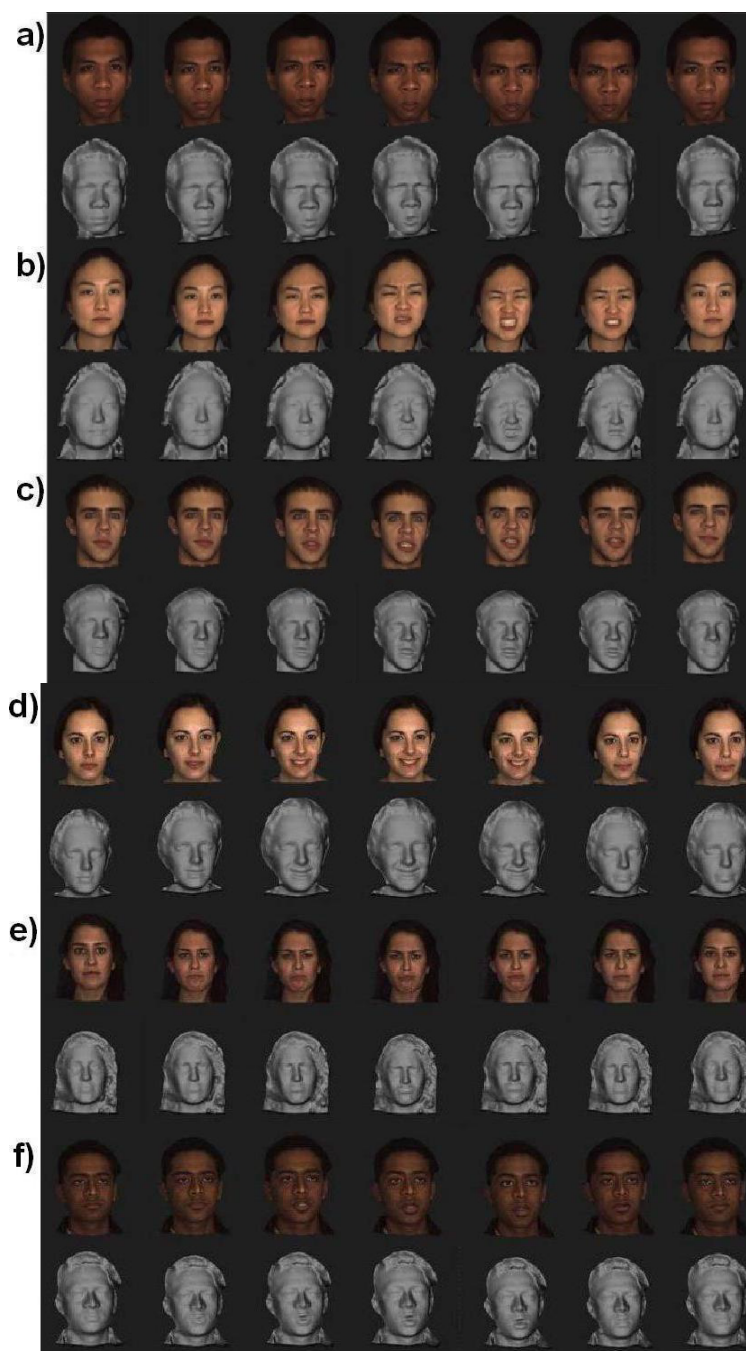


Рис. 2.3. Приклад набору даних BU4DFE, що включає зображення та 3D-моделі: (а) гнів, (b) відраза, (c) страх, (d) радість, (e) сум, (f) здивування



Рис. 2.4. Початкові кадри з послідовностей набору даних BU4DFE, на яких суб'єкти не починають з нейтрального виразу обличчя

### *2.3.2. Процес захоплення даних та обробка*

Дані захоплювалися за допомогою системи динамічного захоплення обличчя Di3D. Ця система включає три камери: дві для захоплення стереозображень та одну для захоплення текстури.

Di3D (Dimensional Imaging 3D) — це спеціалізована система динамічного захоплення обличчя, розроблена компанією Dimensional Imaging, яка широко використовується в академічних дослідженнях та індустрії для створення високоточних 3D-моделей обличчя в русі.

Система Di3D реалізує метод пасивної стереофотограмметрії та складається з багатокамерної конфігурації:

1. Стереокамери (2 одиниці) - дві синхронізовані камери, розташовані під певним кутом, захоплюють зображення обличчя одночасно. Ці стереопари є основою для розрахунку тривимірної геометрії.

2. Камера текстури (1 одиниця) - додаткова камера захоплює 2D-відео високої роздільної здатності, яке використовується для накладання реалістичної текстури (кольору) на згенеровану 3D-модель.

Система Di3D функціонує наступним чином. Всі камери захоплюють відеопослідовність з високою частотою кадрів (наприклад, 25 кадрів на секунду) для фіксації динаміки виразу. На кожному синхронізованому кадрі, використовуючи методи пасивної стереофотограмметрії (яка не потребує активного освітлення чи проекції структурованого світла), система обчислює глибину та 3D-координати кожної видимої точки обличчя. Результатом є

послідовність 3D-моделей (зазвичай у форматі сітки, що містить від 30 000 до 50 000 вершин), які точно відображають мінливу позу та форму обличчя.

Система Di3D відома своєю здатністю досягати дуже високої точності геометричних вимірювань, типово з похибкою середньоквадратичного відхилення (RMS) близько 0,2 мм.

На виході користувач отримує дві синхронізовані послідовності:

- 3D-послідовності моделей (геометрія).
- 2D-відео текстури (копір).

Система Di3D є критично важливою для створення високоякісних динамічних 3D-баз даних виразів обличчя (наприклад, BU4DFE та BP4D), забезпечуючи дослідників необробленими даними, які є стійкими до оклюзії та варіацій освітлення, типових для 2D-зображень.

Для створення 3D-моделей пози обличчя використовується метод пасивної стереофотограмметрії на кожній парі стереозображень. Точність отриманих 3D-моделей становить 0,2 мм середньоквадратичного відхилення (RMS). Кожна 3D-модель містить 83 контрольні точки обличчя (рис. 1.1), які відповідають ключовим анатомічним ділянкам: роту, очам, бровам, носу та лінії щелепи. Виявлення контрольних точок здійснюється за допомогою моделі активної зовнішності (Active Appearance Model, AAM) [13] на 2D-зображеннях текстури. Ці 2D-координати потім вирівнюються та проєктуються у відповідні 3D-моделі.

#### **2.4. Методологія топологічного аналізу даних для візуалізації емоцій людини**

Топологічний аналіз даних набув значного поширення в задачах візуалізації даних. У нашому підході ми використовуємо фундаментальний інструмент TDA — стійкі гомології (persistent homology). Цей метод активно застосовується в аналізі графів [7, 11], аналізі багатовимірних даних [8] та багатофакторному аналізі [6].

Ми використовуємо стійкі гомології для екстракції топологічної структури контрольних точок кожної пози обличчя та її представлення у формі діаграми стійкості (persistence diagram). Це дозволяє порівнювати топологію різних підмножин поз обличчя для виявлення їхніх внутрішніх взаємозв'язків та несхожості.

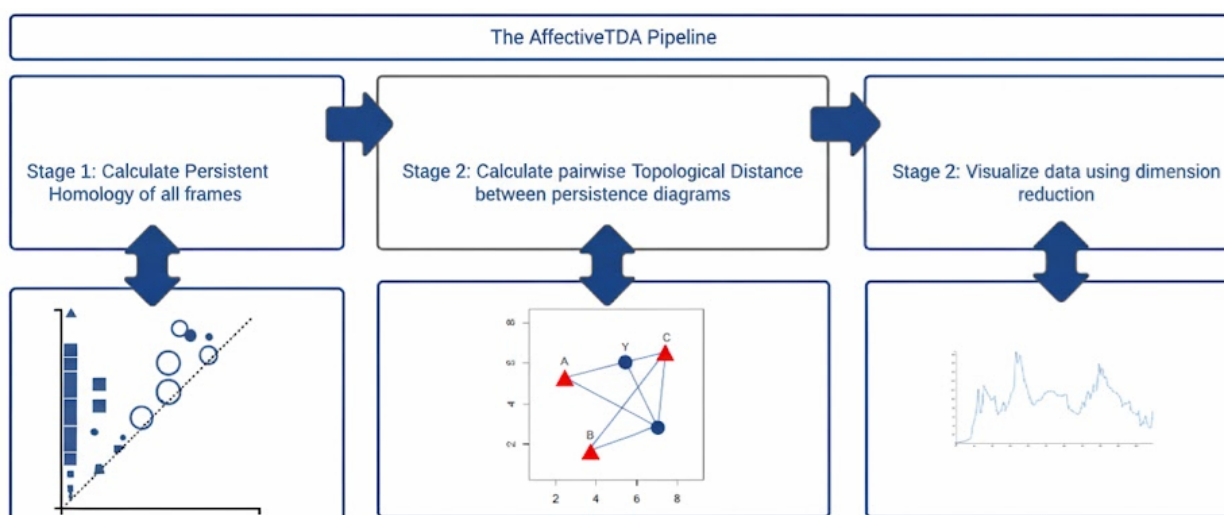


Рис. 2.5. Діаграма, що ілюструє послідовність етапів конвеєра, який використовується для генерації та аналізу топологічних даних

Пропонований конвеєр обробки (рис. 2.5) складається з трьох ключових етапів:

Етап 1. Розрахунок стійких гомологій (екстракція ознак).

На цьому етапі відбувається вилучення топологічної структури для кожної окремої пози обличчя. Ми пропонуємо два варіанти реалізації для побудови симпліціального комплексу: підхід, заснований на евклідовій метриці та підхід на основі псевдометрики.

Етап 2. Розрахунок топологічної відстані (порівняння).

Після вилучення топологічних ознак окремих поз, здійснюється розрахунок попарної топологічної відстані між діаграмами стійкості. Це визначає кількісну несхожість між топологіями різних поз обличчя. Використовуються метрики відстані "пляшкового горлечка" (bottleneck) або відстані Вассерштейна (Wasserstein)

Етап 3. Візуалізація даних із зниженням розмірності (аналіз).

Отримані матриці топологічної несхожості (відстані) використовуються як вхідні дані для різних методів зниження розмірності (Dimensionality Reduction). Застосовуються алгоритми MDS, t-SNE або UMAP.

Це дозволяє візуалізувати та виділяти приховані аспекти несхожості між кластерами або групами поз обличчя.

## 2.5. Методи екстракції топології поз обличчя

У цій роботі ми розглядаємо два методи екстракції топологічної структури пози обличчя: класичний підхід на основі евклідової метрики та варіант, що використовує псевдометрику.

### 2.5.1. Стійкі гомології на основі евклідової метрики на контрольних точках

Гомології є інструментом для вивчення топологічних властивостей простору. Для заданого топологічного простору  $X$  нас цікавить екстракція груп гомологій  $H_0(X)$  та  $H_1(X)$ , які відповідно описують компоненти зв'язності та тунелі/цикли простору  $X^2$ .

Оскільки у практичних задачах може не існувати єдиного просторового масштабу, що адекватно описує топологічні структури даних, ми використовуємо багатомасштабне поняття гомології, відоме як стійкі гомології (persistent homology). Вони дозволяють описати топологічні ознаки простору при різних рівнях просторової роздільної здатності.

Для розрахунку стійких гомологій однієї пози обличчя виконуються такі кроки:

1. Спочатку обчислюється евклідова відстань між усіма 83 контрольними точками.

2. Побудова комплексу Ріпса (Vietoris–Rips Complex), тобто до набору точок застосовується геометрична конструкція — комплекс Ріпса  $R(r)$ . Для заданої відстані (радіусу фільтрації)  $r$ , комплекс  $R(r)$  завжди включає всі 0-симплекси (точки). 1-симплекс (ребро) формується між двома точками тоді і лише тоді, коли  $r$  більше або дорівнює відстані між ними. 2-симплекс (трикутник) формується між трьома точками тоді і лише тоді, коли  $r$  більше або дорівнює кожній попарній відстані між цими трьома точками.

3. Фільтрація та відстеження гомологій. Для екстракції стійких гомологій ми розглядаємо скінченну послідовність зростаючих відстаней:  $0 = r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_m = \infty$ .

Ця послідовність комплексів Ріпса,  $R(r_0) \rightarrow R(r_1) \rightarrow \dots \rightarrow R(r_m)$ , відома як фільтрація Ріпса, пов'язана відношеннями включення. Гомологія кожного комплексу розраховується, а гомоморфізми, спричинені включеннями, відстежуються:  $H(R(r_0)) \rightarrow H(R(r_1)) \rightarrow \dots \rightarrow H(R(r_m))$ .

### 2.5.2. Діаграма стійкості та міра важливості

Зі збільшенням відстані  $r$  топологічні ознаки (компоненти та тунелі) з'являються (народжуються) та зникають (помирають).

- Поява ознаки називається подією народження ( $r_i^b$ ).
- Зникнення ознаки називається подією смерті ( $r_i^d$ ).

Народження та смерть усіх ознак зберігаються у вигляді мультимножини точок на площині  $(r_i^b, r_i^d)$ , яка називається діаграмою стійкості (persistence diagram) і часто візуалізується на діаграмі розсіювання (рис. 2.6 б).

На основі цих точок формується міра важливості — стійкість (persistence), яка слугує для диференціації топологічного сигналу від шуму. Стійкість визначається як різниця між смертю та народженням ознаки:  $\text{Стійкість} = r_i^d - r_i^b$ . На візуалізаціях діаграми стійкості (наприклад, рисунок 2.6 б), відстань від діагональної пунктирної лінії також прямо пропорційна стійкості ознаки.

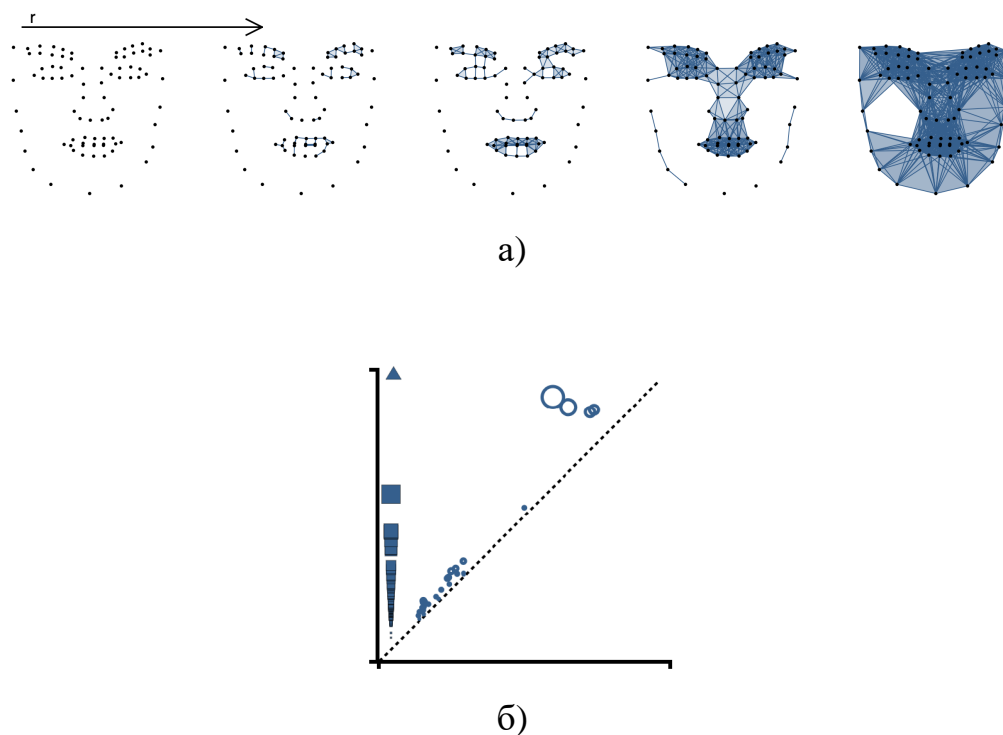


Рис. 2.6. Ілюстрація стійких гомологій на 83 контрольних точках обличчя

Рисунок 2.6 а) відображає фільтрацію Ріпса та відстеження груп гомологій. Зі зростанням  $r$  компоненти зливаються, а тунелі утворюються та зникають. Рисунок 2.6 б) представляє візуалізацію топології за допомогою діаграми стійкості. Квадратні точки представляють компоненти  $H_0$  (один трикутник позначає нескінченну компоненту  $H_0$ ), а порожні кола — тунелі  $H_1$ . Горизонтальна координата — народження  $\gamma_1^b$ , вертикальна — смерть  $\gamma_1^d$ . Відстань від діагоналі відображає стійкість.

Окрім аналізу топології всіх контрольних точок, система передбачає функціональність для вибіркового розгляду пов'язаних підмножин ознак. Користувач може включати/виключати у розрахунок топології такі регіони: лінію щелепи, рот, ніс, ліве/праве око та ліву/праву брову.

В даному випадку, ми не розглядаємо  $H_2$  (порожнини), оскільки, незважаючи на те, що дані є 3D, вони мають майже планарний характер. Відповідно, порожнини виникають рідко і мають низьку стійкість.

## 2.6. Врахування внутрішньої зв'язності точок обличчя та перехід до псевдометрики

Розрахунок топології, заснований виключно на евклідовій метриці між 83 контрольними точками обличчя, ігнорує критичний аспект даних: відому анатомічну зв'язність між цими точками. Ці точки, особливо ті, що формують контури рота чи очей, мають заздалегідь визначені зв'язки з сусідніми точками, як проілюстровано на рисунку 2.7.

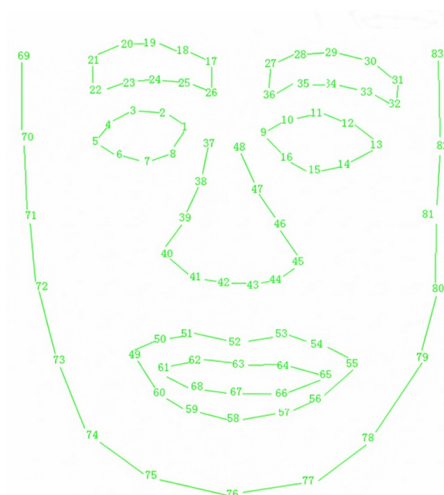


Рис. 2.7. Відома зв'язність 83 контрольних точок із набору даних BU4DFE

Ігнорування цієї інформації ставить дві основні задачі:

1. Чи впливає неврахування відомої зв'язності на топологічні ознаки, що екстрагуються?
2. Яким чином можна ефективно інтегрувати цю зв'язність у процес розрахунку стійких гомологій?

Для оцінки впливу зв'язності ми спочатку розглянули метод суперсемплінгу (збільшення дискретизації), застосовуючи інтерполяцію вздовж відомих ребер.

У цьому експерименті додаткові контрольні точки інтерполювалися вздовж кожного ребра (виходячи з відомої зв'язності), забезпечуючи, щоб

відстань між будь-якими двома сусідніми точками не перевищувала значення  $\epsilon$ , визначене користувачем. На рисунках 2.8 б) – 2.8 е) представлені чотири приклади з послідовно зменшуваними значеннями  $\epsilon$ . Як і очікувалося, зі зменшенням  $\epsilon$  візуалізація даних все більше наближається до відомої зв'язності, показаної на рисунку 2.7.

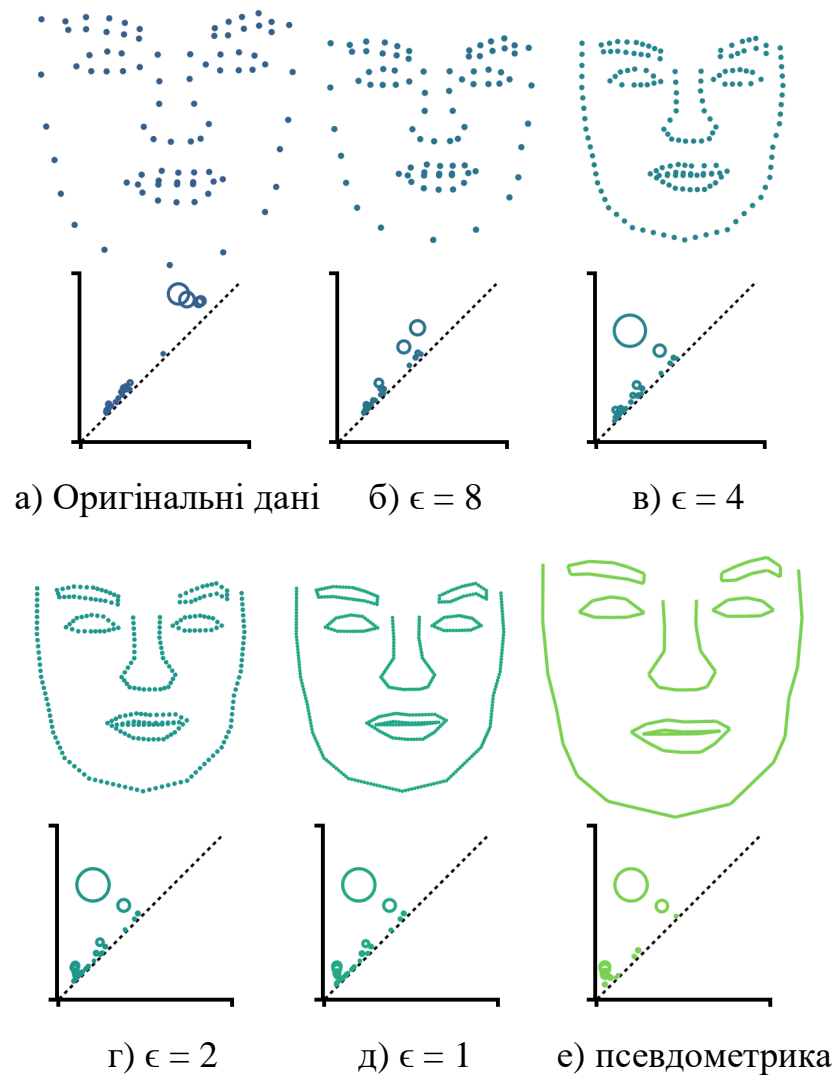


Рис. 2.8. Ілюстрація суперсемплінгу

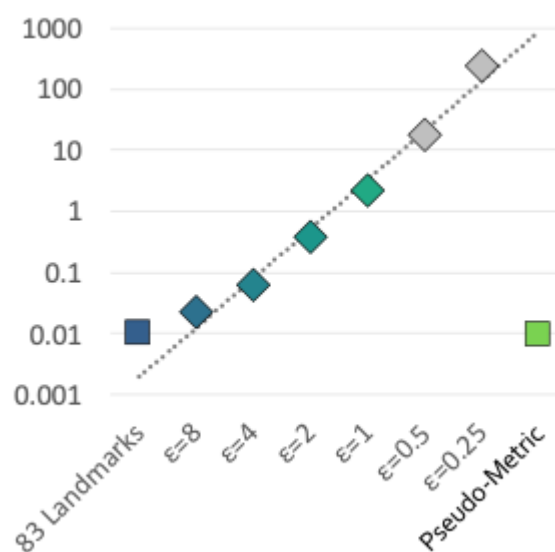
а) вихідні 83 контрольні точки. (е - д) суперсемплінг з різними  $\epsilon$  демонструє, що діаграми стійкості ознак  $H_1$  (порожні кола) суттєво відрізняються між вихідними даними (а) та суперсемплованими даними з найменшим  $\epsilon$  (е)

Порівняння діаграм стійкості ознак  $H_1$  у вихідних даних (Рисунок 2.8 а) та даних з найменшим  $\epsilon$  (рис. 2.8 д) виявило явну різницю (ця різниця також стосується ознак  $H_0$ , хоча їх важче візуально відрізнити на діаграмі). Ця невідповідність є критичною, оскільки вона свідчить про те, що використання лише 83 вихідних контрольних точок недостатньо для адекватного захоплення топологічної структури відомих контурів. Втрата цих топологічних структур може призвести до неточного та зашумленого аналізу.

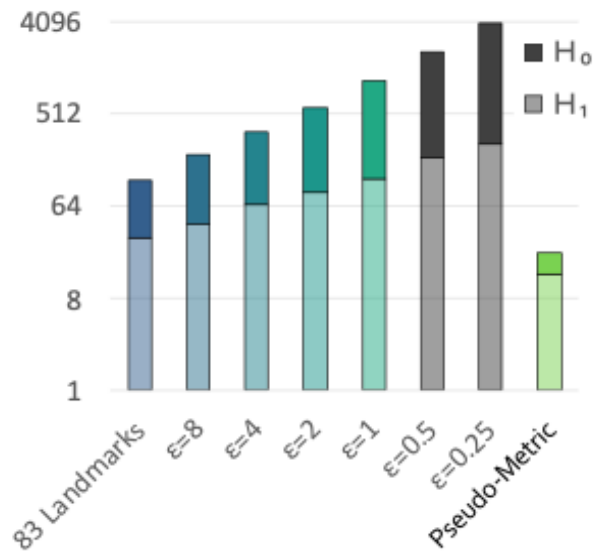
Незважаючи на те, що суперсемплінг дозволяє відновити топологічні ознаки, він має три взаємопов'язані проблеми, які перешкоджають його практичному застосуванню:

1. Вибір оптимального значення  $\epsilon$  є нетривіальним. Хоча певні значення можуть виглядати адекватними для конкретного прикладу (наприклад, рис. 2.8 в), немає гарантії його універсальності для всього набору даних, що може вимагати вибору ще менших значень  $\epsilon$ .

2. Зменшення  $\epsilon$  призводить до експоненційного зростання часу обчислення стійких гомологій. рисунок 2.9 а) ілюструє, що при двократному зменшенні  $\epsilon$  час обчислення зростає відповідно до експоненційної залежності.



а) Час обчислення (у секундах)



б) Кількість згенерованих ознак

Рис. 2.9. Графічне порівняння

На рисунку 2.9 а) демонструє експоненційне зростання часу обчислення зі зменшенням  $\epsilon$  для суперсемплінгу, а б) ілюструє екстремальне збільшення кількості згенерованих топологічних ознак при зменшенні  $\epsilon$ . Порівнюються вихідні дані, шість рівнів суперсемплінгу та псевдометричне представлення.

3. Зменшення  $\epsilon$  спричиняє різке збільшення кількості згенерованих топологічних ознак (рисунок 2.9 б). Переважна більшість цих ознак має дуже низьку стійкість, що класифікує їх як топологічний шум, який не сприяє розумінню глобальної форми обличчя.

З огляду на обмеження суперсемплінгу, ми пропонуємо псевдометричне представлення даних (рисунок 2.8 е). Цей підхід вимагає значно меншого обсягу даних (кількості точок) і, що критично, генерує діаграму стійкості, яка є аналогічною діаграмі, отриманій за допомогою ресурсомісткого суперсемплінгу (рисунок 2.8 д). Цей підхід дозволяє ефективно врахувати відому зв'язність, уникаючи великих обчислювальних витрат.

## 2.7. Підвищення надійності топологічного аналізу даних обличчя шляхом використання псевдометрики ребер

Ми пропонуємо нову модифікацію розрахунку стійких гомологій, яка дозволяє безпосередньо використовувати відому анатомічну зв'язність контрольних точок.

Замість того, щоб аналізувати 83 контрольні точки як окремі елементи, ми зосереджуємося на взаємозв'язку між 81 ребром контрольних точок, які формуються відомою анатомічною зв'язністю (рис. 2.7).

Процедура є наступною:

1. Формування простору ознак. Ми розглядаємо ці 81 ребро як новий набір об'єктів (0-симплексів).

2. Розрахунок матриці несхожості, тобто обчислюється матриця несхожості, де мірою несхожості між будь-якою парою ребер є евклідова відстань між відповідними відрізками ліній.

3. Розрахунки стійких гомологій виконуються на цій матриці несхожості.

Ця конфігурація може викликати питання щодо її відповідності вимогам метричного простору, зокрема через порушення аксіоми тотожності нерозрізнюваних (identity of indiscernibles). Однак розрахунки стійких гомологій не вимагають строго метричного простору; вони мають слабшу вимогу включення [8]. Тобто, доки у фільтрації виконується умова  $R(r_i) \subset R(r_{i+1})$ , розрахунок може бути продовжений.

Класичний комплекс Ріпса вимагає метричного базового простору. Для вирішення цього, ми визначаємо новий псевдометричний комплекс Ріпса, який задовольняє властивість включення:

- 0-симплекси представляють ребра контрольних точок і присутні для всіх значень радіусу фільтрації  $r$ .

- 1-симплекси (ребра) з'являються тоді, коли  $r$  строго більше за псевдометричну відстань між парою 0-симплексів (ребер).

- 2-симплекси (трикутники) з'являються тоді, коли  $r$  строго більше за всі псевдометричні відстані трьох пов'язаних 1-симплексів.

Завдяки тому, що це визначення є достатньо схожим на стандартний комплекс Ріпса, ретельне впорядкування включень у фільтрації (дотримання випадків "строго більше") дозволяє нам використовувати звичайні програмні інструменти стійких гомологій на наших псевдометричних відстанях.

Псевдометричний підхід успішно долає всі три обмеження, виявлені при використанні суперсемплінгу:

1. Результат (діаграма стійкості) є високорелевантним та схожим на результат ресурсомісткого суперсемплінгу з найменшим  $\epsilon$  (рисунок 2.8 д), але без необхідності вказувати параметр  $\epsilon$ .

2. Час обчислення для псевдометричного підходу є порівнянним із часом, необхідним для обробки лише вихідних 83 контрольних точок (рис. 2.9 а - час обчислення у секундах).

3. Кількість згенерованих топологічних ознак є низькою (рисунок 2.9 б - кількість згенерованих ознак), що ефективно унеможливорює виведення надлишкового топологічного шуму з низькою стійкістю.

## **2.8. Порівняльний аналіз топології поз обличчя**

Після екстракції топологічних ознак окремих поз обличчя, наступним етапом є порівняння їхніх структур. У цьому розділі описано метод кількісного визначення несхожості між позами за допомогою топологічної відстані, а також застосування технік зниження розмірності для узагальнення та візуалізації цих варіацій.

### *2.8.1. Несхожість між позами обличчя: топологічні відстані*

Взаємозв'язок між діаграмами стійкості досліджується шляхом виконання попарних порівнянь ознак, як це ілюструє рисунок 2.10. Для кількісного вимірювання топологічної несхожості широко застосовуються

метрики відстані "пляшкового горлечка" (Bottleneck Distance) та відстані Вассерштейна (Wasserstein Distance).

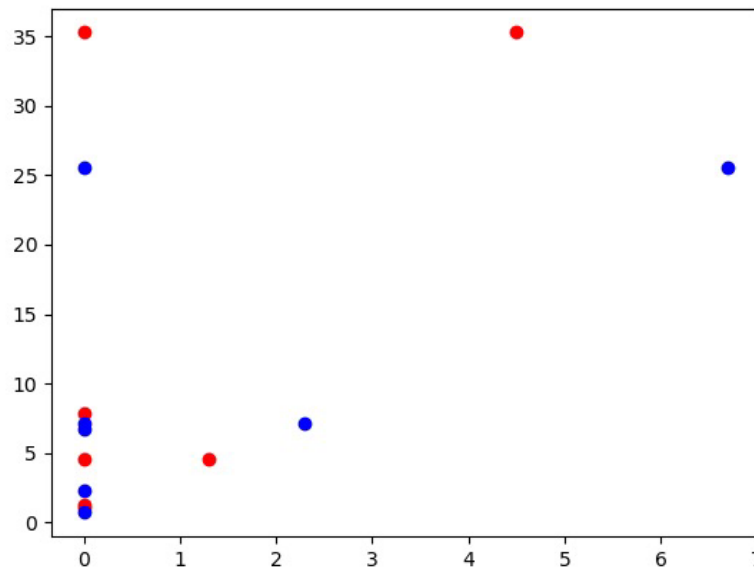


Рис. 2.10. Схема, що ілюструє процес пошуку відповідності (бієкції) між двома діаграмами стійкості (PD1 та PD2). Алгоритм ідентифікує бієкцію, що мінімізує сумарну відстань між двома наборами ознак.

Інтуїтивно, ці міри знаходять оптимальне відображення (бієкцію) між ознаками двох діаграм стійкості. Відстань "Пляшкового Горлечка" відображає найбільше спотворення між відповідними топологічними ознаками. Відстань Вассерштейна відображає середнє топологічне спотворення.

Розглянемо дві діаграми стійкості,  $X$  та  $Y$ . Нехай  $\eta$  — бієкція, яка включає додавання діагональних точок для забезпечення нескінченної потужності.

Відстань "Пляшкового Горлечка":

$$W_{\infty}(X, Y) = \inf_{\eta: X \rightarrow Y} \sup_{x \in X} \|x - \eta(x)\|_{\infty}$$

1-Відстань Вассерштейна:

$$W_1(X, Y) = \inf_{\eta: X \rightarrow Y} \sum_{x \in X} \|x - \eta(x)\|_\infty$$

Наша реалізація обчислює відстані окремо для ознак нульового ( $H_0$ , компоненти зв'язності) та першого ( $H_1$ , цикли/тунелі) порядків, а потім комбінує їх:

- для відстані "Пляшкового Горлечка":

$$W_\infty(X, Y) = \max(W_\infty(X_{H_0}, Y_{H_0}), W_\infty(X_{H_1}, Y_{H_1}))$$

- для 1-Відстані Вассерштейна:

$$W_1(X, Y) = W_1(X_{H_0}, Y_{H_0}) + W_1(X_{H_1}, Y_{H_1})$$

### 2.8.2 Узагальнення топологічної несхожості

Після розрахунку всіх попарних несхожостей між позами обличчя формується матриця несхожості (dissimilarity matrix), яка акумулює всі топологічні варіації. Оскільки прямий аналіз такої високорозмірної матриці є складним, ми застосовуємо методи для її узагальнення та візуалізації. Кожен використаний метод зберігає різний аспект матриці, надаючи множинні перспективи на дані.

#### 1. Одновимірна відносна відстань

Перший підхід використовує 1D відносну відстань. Користувач визначає ключовий кадр (фокусну позу). Усі інші пози обличчя позиціонуються відповідно до їхньої топологічної відносної відстані (отриманої за допомогою відстані "пляшкового горлечка" або Вассерштейна) до цього ключового кадру. Хоча цей метод ідеально зберігає взаємозв'язок між ключовим кадром та рештою, він не надає інформації про взаємозв'язок між іншими парами кадрів.

#### 2. Зниження розмірності для кластеризації

Для аналізу внутрішньої структури матриці попарної несхожості безпосередньо використовуються три методи зниження розмірності:

- Багатовимірне шкалювання (Multidimensional Scaling, MDS): намагається максимально зберегти всі попарні відстані між топологією поз у просторі нижчої розмірності.

- t-SNE (t-distributed Stochastic Neighbor Embedding) та UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection) - ці методи націлені на збереження структури кластеризації шляхом моделювання локального сусідства навколо точок.

Методи t-SNE та UMAP чутливі до гіперпараметрів, які можуть впливати на візуалізовані структури. Проте, структурована оцінка, проведена нами, показала, що виявлені структури є стабільними в широкому діапазоні значень параметрів. У більшості наших оцінок ми використовуємо параметри за замовчуванням.

Для вимірювання якості відповідності (goodness-of-fit) для всіх методів використовується рангова кореляція Спірмена діаграми Шепарда. Цей показник (позначений як Rank на візуалізаціях) оцінює, наскільки добре зберігається відносний порядок відстаней після проектування.

Слід зазначити, що жоден із цих підходів безпосередньо не враховує часовий фактор. Проте часові компоненти даних інтегруються у візуалізацію, коли це необхідно для контексту.

### **Висновки до розділу**

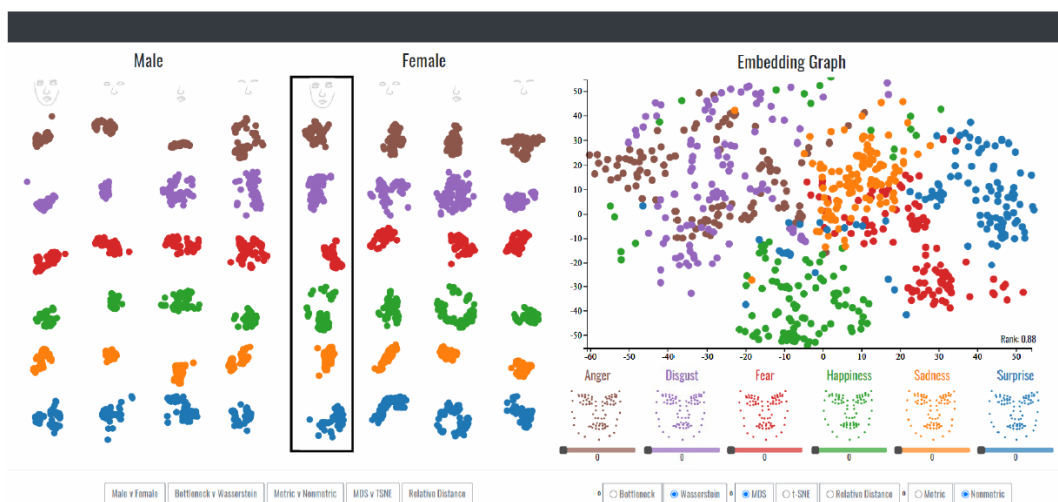
У другому розділі було проведено розгорнутий огляд сучасних методів розпізнавання мимічних виразів та їхнього взаємозв'язку з топологічними характеристиками обличчя. Аналіз класичних і глибинних підходів продемонстрував, що кожна методологія має свої обмеження, пов'язані зі стійкістю до варіацій та необхідністю великих обсягів тренувальних даних. Було встановлено, що геометричні моделі обличчя забезпечують

інформативність, проте рівень інтерпретованості часто залежить від вибору дескрипторів. Значне місце у дослідженні посів розгляд набору даних BU4DFE, який дав можливість оцінити характер морфологічних змін під час прояву різних емоцій. У роботі було проаналізовано процес збирання та попередньої обробки даних, що дозволило забезпечити точність екстракції контрольних точок. Розгляд методів обчислення стійких гомологій на основі евклідової метрики показав, що топологічні структури можуть ефективно відображати відмінності між мимічними позами. Додатково було обґрунтовано потребу у псевдометриці, яка враховує внутрішню зв'язність точок обличчя і таким чином підвищує стабільність результатів. Проведений порівняльний аналіз підтвердив ефективність топологічних відстаней для вимірювання несхожості між мимічними конфігураціями.

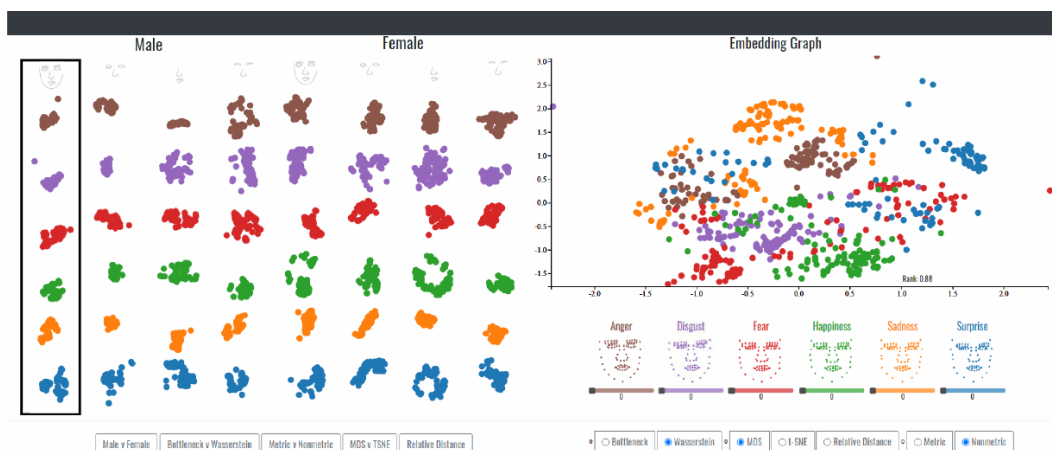
# РОЗДІЛ 3. ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ МЕТОДОЛОГІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ АРХІТЕКТУРИ СИСТЕМИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА СИМУЛЯЦІЇ ЕМОЦІЙ ЛЮДИНИ

## 3.1. Реалізація інтерфейсу візуально-аналітичної системи

Для ефективного дослідження топологічної структури даних контрольних точок обличчя була розроблена спеціалізована візуально-аналітична система (рис. 3.1). Дизайн цієї системи ґрунтується на низці критеріїв, спрямованих на максимізацію інтерпретованості та порівняльного аналізу топологічних ознак.



а) F001 Wasserstein MDS



б) M001 Wasserstein MDS

Рис. 3.1. Інтерфейс системи візуалізації та симуляції емоцій людини

Критерії дизайну інтерфейсу:

D1. Множинність представлень. Надання різноманітних візуалізацій для оцінки як часових (анімовані та залежні від часу), так і нечасових (статичні) аспектів даних.

D2. Варіативність аналітичних перспектив. Забезпечення можливості порівняння результатів, отриманих за різних аналітичних умов (наприклад, порівняння метрик відстані — Bottleneck vs. Wasserstein, або методів зниження розмірності — MDS vs. t-SNE vs. UMAP).

D3. Міжемоційне порівняння. Підтримка прямого порівняння топологічної несхожості між двома або більше емоційними станами.

D4. Дослідження підмножин ознак. Дозвіл на дослідження топології, екстрагованої з конкретних анатомічних підмножин контрольних точок.

D5. Пряма пояснюваність. Надання засобів для отримання прямих пояснень топологічних відмінностей між конкретними позами обличчя.

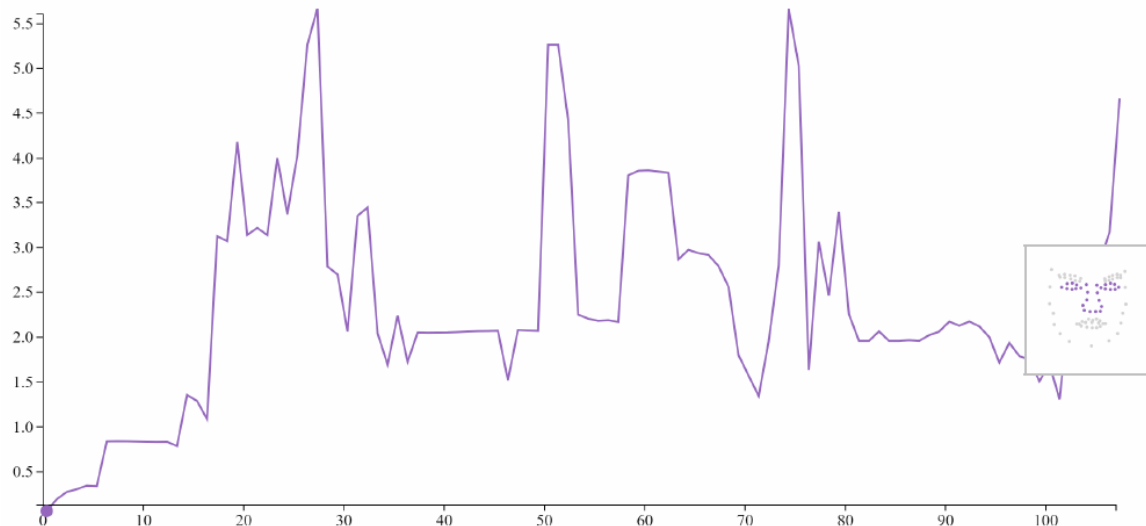
На рисунку 3.1 а) ліворуч показано дисплей малих множинних графіків, який є центральним елементом інтерфейсу — сітка графіків, що відображає множинні конфігурації даних для порівняльного аналізу:

- порівняння умов [D2]: інтерфейс підтримує зіставлення двох аналітичних умов (стовпці сітки), включаючи порівняння між різними суб'єктами, відстанями Вассерштейна та "пляшкового горлечка", метричною та псевдометричною топологією, а також різними методами зниження розмірності (t-SNE, MDS, UMAP).

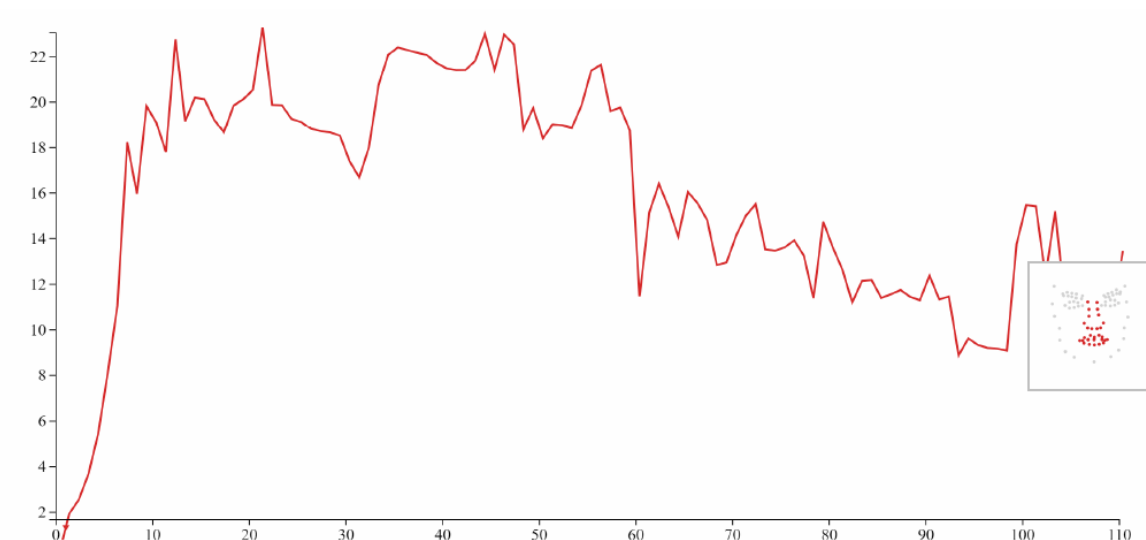
- дослідження регіонів обличчя [D4]: кожен стовпець додатково поділяється на порівняння різних підмножин рис обличчя: повне обличчя, очі + ніс, рот + ніс та брови + ніс.

- структура емоцій [D3]: кожен рядок сітки представляє одну з шести базових емоцій (гнів, відраза, страх, щастя, сум, здивування). Користувач динамічно обирає дані для вкладення, вибираючи стовпці та активуючи/деактивуючи емоції, що цікавлять, через вибір рядків.

Кожен графік у сітці відображається за допомогою обраної користувачем модальності візуалізації, визначеної у налаштуваннях.



а) відраза (очі + ніс)



б) страх (рот + ніс)

Рис. 3.2. Представлення 1D відносної відстані (по вертикалі) як функції часу (по горизонталі).

Графік вкладення (рис. 3.1 а) угорі праворуч) є основним інструментом візуалізації, що представляє топологічні дані у просторі зниженої

розмірності. Він може відобразитися у двох основних форматах для обраних емоцій:

А. Лінійна діаграма (часовий аналіз) [D1, D2]

Горизонтальна вісь відображає час, вертикальна вісь — 1D відносну відстань (рис. 3.2).

Порівняння [D3]: різні обрані емоції накладаються одна на одну для залежного від часу порівняння.

Користувач обирає ключовий кадр, і візуалізація динамічно оновлюється для відображення відносної топологічної відмінності від цього ключового кадру.

Б. Діаграма розсіювання (нечасовий аналіз) [D1]

Обидві осі (горизонтальна та вертикальна) використовують результати 2D зниження розмірності.

Користувач має можливість вибору між MDS, t-SNE та UMAP.

Дані можуть відобразитися або як дискретні точки, або з'єднуватися шляхом (path-connected), якщо користувач бажає зберегти часовий контекст послідовності (рис. 3.3).

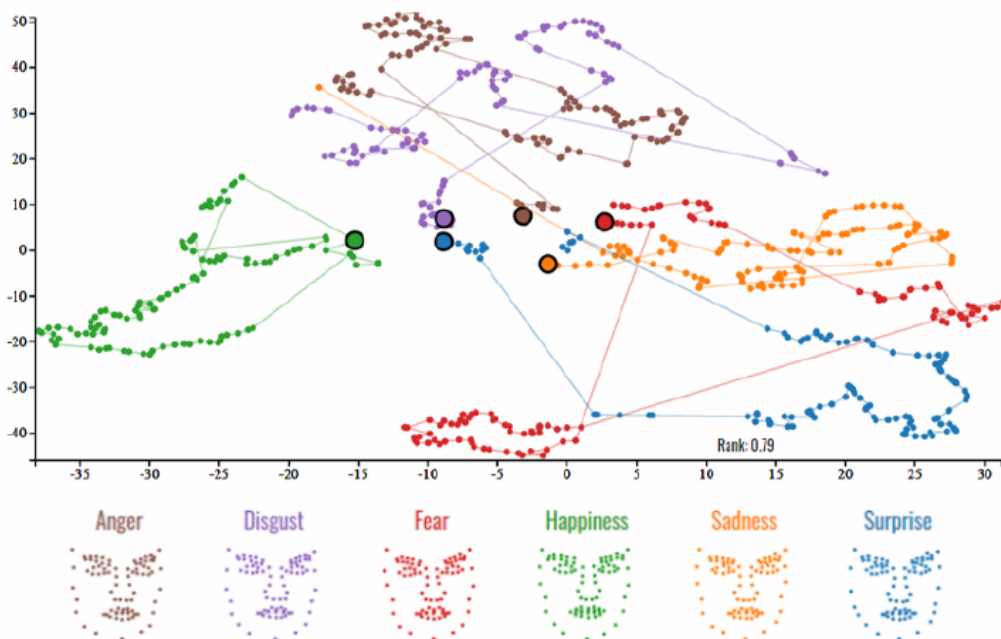


Рис. 3.3. Візуалізація шляхів, що з'єднують 2D дані, спроектовані за допомогою зниження розмірності, для відображення часової динаміки

Вибір окремих точок на графіку оновлює часовий індекс, який використовується для відображення в інших елементах інтерфейсу, наприклад, 3D контрольних точках.

3D Контрольні точки (Landmark Points) показані внизу праворуч на рис. 3.1 а. Цей елемент інтерфейсу забезпечує найбільш прямий і детальний огляд даних:

- Відображення даних - візуалізує 3D-координати контрольних точок, які відповідають поточному часовому індексу (кадру) та обраній емоції.

Пози обличчя розміщуються пліч-о-пліч, що полегшує візуальне порівняння та надає можливість прямого пояснення топологічних відмінностей через фізичний огляд геометрії.

Повзунки, розташовані під кожним 3D-зображенням, можуть використовуватися для анімації послідовності або для ручного налаштування часового індексу.

## **3.2. Компоненти візуалізації для інтерпретованості топологічних ознак**

### *3.2.1. Діаграми стійкості*

Для деталізованого аналізу та інтерпретації топологічних властивостей конкретної пози обличчя використовується візуалізація діаграми стійкості. Ця діаграма представлена у вигляді діаграми розсіювання, що відображає основні топологічні характеристики, екстраговані стійкими гомологіями:

- Координати: по горизонтальній осі відкладається момент народження ознаки (rb), по вертикальній — момент її смерті (rd).

- Типи ознак: ознаки нульового порядку (H<sub>0</sub>, компоненти зв'язності) представлені суцільними квадратами, тоді як ознаки першого порядку (H<sub>1</sub>, цикли/тунелі) — кільцями.

- Стійкість (Важливість): розмір кожного елемента на діаграмі пропорційний його стійкості (Стійкість=rd-rb), що слугує мірою його

важливості та відмінності від топологічного шуму. Відстань точки від пунктирної діагоналі також є мірою її стійкості.

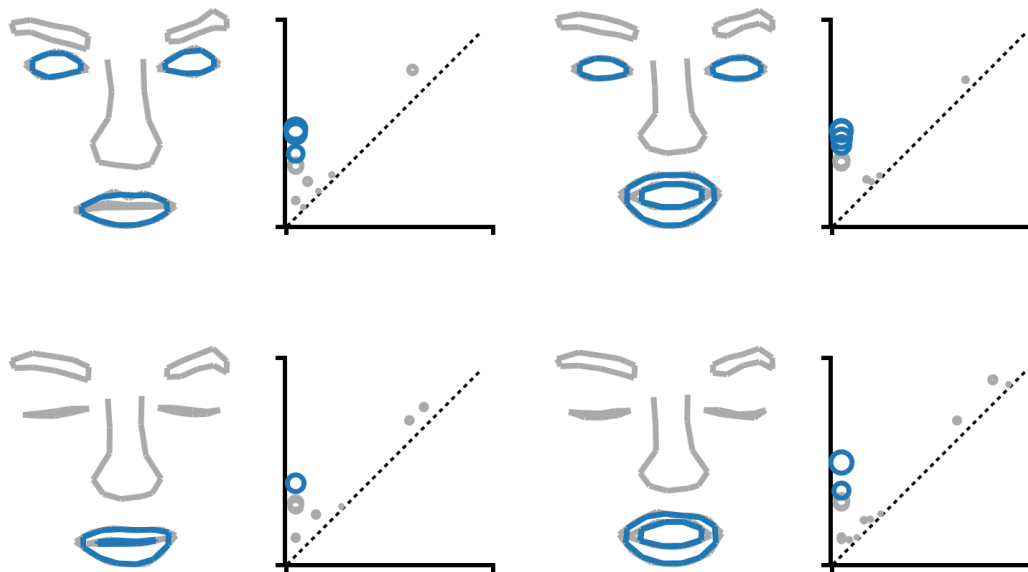


Рис. 3.4. Ілюстрація механізму пояснюваності підходу, що базується на TDA, з використанням чотирьох поз емоції "Здивування" суб'єкта F001

Для кожної пози показано діаграми стійкості (праворуч), а також репрезентативні цикли з найвищою стійкістю (ліворуч). Кількість та стійкість ознак пояснюють відмінність між позами, тоді як репрезентативні цикли пояснюють, які саме контрольні точки згенерували ці топологічні ознаки.

### 3.2.2. Репрезентативні компоненти та цикли

Для забезпечення прямої пояснюваності, як побічний продукт розрахунку стійких гомологій, ідентифікуються генератори — структури, які безпосередньо призвели до формування певної топологічної ознаки.

Генератори  $H_0$ : для компонентів зв'язності ( $H_0$ ) генератори позначають 0-симплекси, відповідальні за злиття двох окремих компонентів.

Генератори  $H_1$ : для ознак циклів ( $H_1$ ), хоча теоретично існує цілий клас генераторів, виводиться репрезентативний цикл<sup>3</sup>, отриманий у результаті процесу редукції граничної матриці.

Ці генератори дозволяють ідентифікувати, які саме вхідні дані (контрольні точки) створили дану топологічну ознаку. Основна увага при аналізі зосереджується на генераторах, що відповідають ознакам із високою стійкістю.

### **3.3. Емпірична оцінка та обчислювальна продуктивність**

Оцінка ефективності запропонованого підходу була проведена у два етапи. Спочатку ми здійснили детальний аналіз на двох репрезентативних індивідуумах — одній жінці ('F001') та одному чоловікові ('M001') з набору даних BU4DFE. На наступному етапі ми оцінили здатність підходу до диференціації індивідуумів, використовуючи весь набір даних, що включає 101 суб'єкта.

Кожен суб'єкт у наборі даних містить приблизно 600 поз обличчя (6 базових емоцій, по  $\approx 100$  кадрів на емоцію). Оскільки надані дані є об'ємними та динамічними, наша методологія забезпечує умовне спостереження за топологією емоцій на основі таких факторів, як індивідуум, емоційний стан, обрана підмножина рис обличчя (повне обличчя, очі + ніс, рот + ніс, брови + ніс), міра топологічної несхожості та техніка зниження розмірності. Наша оцінка зосереджена на тому, як ці умовні порівняння корелюють із відомими явищами у сфері афективних обчислень.

Наш підхід був реалізований на платформі Python. Для управління даними, розрахунку псевдометричної відстані та зниження розмірності використовувався Python. Розрахунки стійких гомологій виконувалися за допомогою бібліотеки Ripser, топологічні відстані — за допомогою Nera, а користувацький інтерфейс (UI) був розроблений із застосуванням D3.js.

Стійкі гомології та топологічна несхожість для всіх комбінацій підмножин контрольних точок попередньо розраховуються. Зниження розмірності виконується в режимі реального часу; цей процес займає не більше кількох секунд. Оскільки ці дані обчислюються, вони зберігаються у

короткостроковому кеші для оптимізації продуктивності, забезпечуючи інтерактивність користувацького інтерфейсу.

Ми оцінили обчислювальну продуктивність вилучення ознак стійких гомологій та розрахунку матриць несхожості (Bottleneck та Wasserstein) для суб'єктів F001 та M001 (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1.

Обчислювальна продуктивність вилучення ознак

Обчислювальний Етап	Метричний підхід (Час)	Псевдометричний підхід (Час)	Співвідношення
Розрахунок стійких гомологій (F001/M001)	$T_{\text{metrics}}$	$\approx 2 \times T_{\text{metrics}}$	Уповільнення у 2 рази
Розрахунок матриці несхожості (F001/M001)	$T_{\text{dissimilarity}}$	$\approx 0.07 - 0.1 \times T_{\text{dissimilarity}}$	Прискорення у 10-15 разів
Загальний час попередньої обробки	$T_{\text{total\_metric}}$	$T_{\text{total\_pseudo}}$	Прискорення у 7.5 разів

Проведемо аналіз продуктивності.

Розрахунок стійких гомологій для нашого псевдометричного підходу зайняв приблизно вдвічі більше часу, ніж для стандартного метричного підходу. Це пояснюється додатковими обчислювальними витратами на розрахунок відстані сегмент-сегмент (у псевдометриці) замість простої відстані точка-точка (у метриці).

Ключова перевага в продуктивності псевдометричного підходу проявляється при розрахунку матриць несхожості, де було зафіксовано прискорення у 10–15 разів порівняно з метричним підходом. Цей вигравш пояснюється значно зменшеною кількістю шумових ознак, згенерованих псевдометричним підходом.

Загальний час попередньої обробки для пропонованого підходу показав прискорення приблизно у 7.5 разів порівняно з традиційним метричним підходом, що підтверджує його обчислювальну ефективність.

### 3.4. Порівняльний аналіз топології та одиниць дій

В афективних обчисленнях застосовуються різноманітні підходи для розпізнавання виразів. Одним із найбільш перспективних є використання одиниць дій (Action Units, AUs), які являють собою дискретні рухи м'язів обличчя, пов'язані з емоційним виразом. AUs кількісно представлені шкалою інтенсивності від  $[0, 5]$ , де 0 означає неактивний стан, а значення  $> 0$  відображають активність із зростаючою інтенсивністю руху. Доведено, що специфічні конфігурації активних AUs є ефективними для автоматичного розпізнавання виразів обличчя.

AUs традиційно генеруються двома способами:

- Ручна анотація, коли експерт вручну анотує відеокадри, що є повільним і трудомістким процесом.

- Автоматичне вилучення – це використання алгоритмів машинного навчання для автоматичної екстракції AUs з даних. Цей метод є швидким, але йому бракує пояснюваності щодо вимірювання активності AUs.

У цьому дослідженні ми автоматично виявляємо 17 AUs (рис. 3.6) за допомогою загальнодоступного інструментарію OpenFace [4], який часто використовується у літературі з афективних обчислень.

OpenFace — це вільно поширюваний (open-source) та крос-платформний інструментарій для аналізу лицьового відео, який широко використовується в дослідженнях з афективних обчислень, соціальної взаємодії та комп'ютерного зору. Він надає потужний набір інструментів для автоматичного вилучення ключових параметрів обличчя з відеопотоків або зображень.

Інструментарій інтегрує кілька передових алгоритмів для виконання наступних завдань:

1. Відстеження обличчя (Facial Landmark Detection and Tracking). OpenFace використовує техніки на основі глибокого навчання, щоб точно локалізувати та відстежувати ключові контрольні точки (landmarks) обличчя

(зазвичай 68 або 70 точок) у реальному часі. Це дозволяє аналізувати рух голови та деформації обличчя протягом часу.

2. Одиниці дій (Action Unit, AU) розпізнавання. Інструментарій автоматично розпізнає та вимірює інтенсивність (за шкалою від 0 до 5) або присутність (бінарно) до 17 Одиниць Дій (AUs), які є компонентами системи кодування виразів обличчя (FACS). Це дозволяє кількісно оцінювати емоційні вирази.

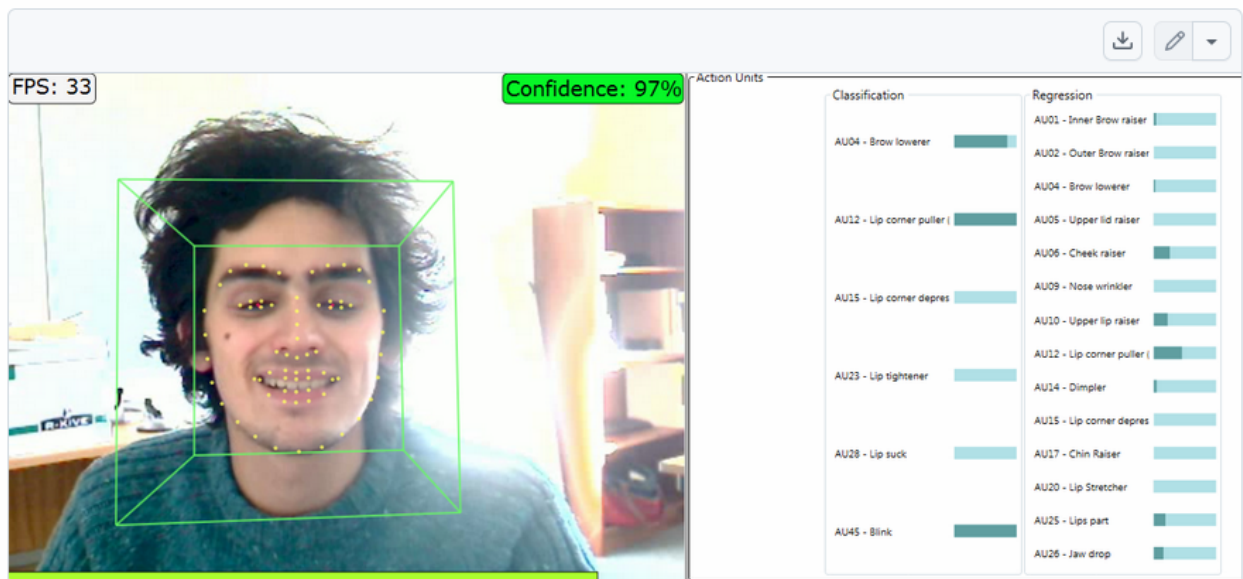


Рис. 3.5. Розпізнавання одиниць дій обличчя за допомогою OpenFace

3. Оцінка пози голови (Head Pose Estimation). Визначає орієнтацію голови у тривимірному просторі, виражену в кутах обертання (Yaw, Pitch, Roll) та трансляції (X, Y, Z). Це критично важливо для компенсації руху голови під час аналізу міміки.

4. Оцінка погляду (Gaze Estimation). Визначає напрямок погляду людини. Інструментарій оцінює 3D-вектор погляду для кожного ока, що є цінним для аналізу уваги та соціальної взаємодії.

OpenFace є важливим інструментом, оскільки він надає дослідникам швидкий і надійний спосіб перетворити сирі відеодані обличчя на змістовні

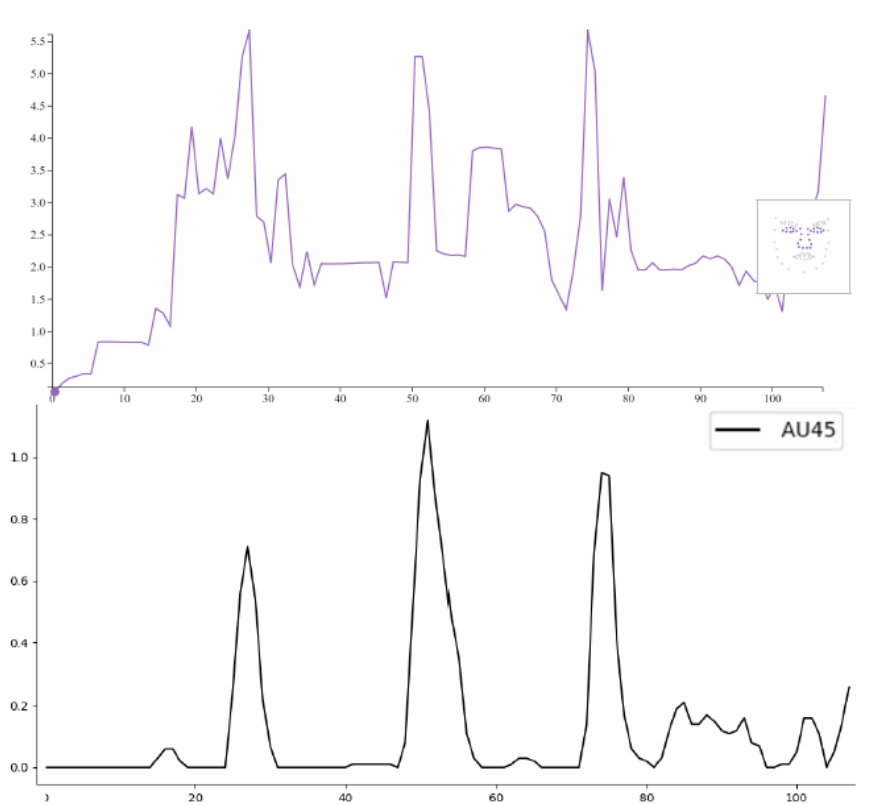
кількісні ознаки, які використовуються для навчання моделей або для топологічного аналізу

Action Unit (AU)	Facial Muscles (лицьові м'язи)	Description (опис руху)
AU1	Frontalis, pars medialis	Inner eyebrow raise (Підняття внутрішньої частини брови)
AU2	Frontalis, pars lateralis	Outer eyebrow raise (Підняття зовнішньої частини брови)
AU4	Depressor Glabellae, Depressor Supercilii, Corrugator	Eyebrow lower (Опускання брови)
AU5	Levator Palpebrae superioris	Upper eyelid raise (Підняття верхньої повіки)
AU6	Orbicularis oculi, pars orbitalis	Cheek raise (Підняття щоки)
AU7	Orbicularis oculi, pars palpebralis	Eye lid tighten (Напруження повіки)
AU9	Levator labii superioris alaquae nasi	Nose wrinkle (Зморщування носа)
AU10	Levator Labii Superioris, Caput infraorbitalis	Upper lip raise (Підняття верхньої губи)
AU12	Zygomatic Major	Lip corner pull (Відтягування кутика губ)
AU14	Buccinator	Dimple (Ямка)
AU15	Depressor anguli oris	Lip corner depress (Опускання кутика губ)
AU17	Mentalis	Chin raise (Підняття підборіддя)
AU20	Risorius	Lip stretch (Розтягування губ)
AU23	Orbicularis oris	Lip tighten (Напруження губ)
AU25	Depressor Labii, Relaxation of Mentalis, Orbicularis Oris	Lips part (Розкриття губ)
AU26	Masseter, Temporal/Internal Pterygoid	Jaw drop (Опускання щелепи)
AU45	Levator Palpebrae, Orbicularis Oculi, Pars Palpebralis	Blink (Моргання)

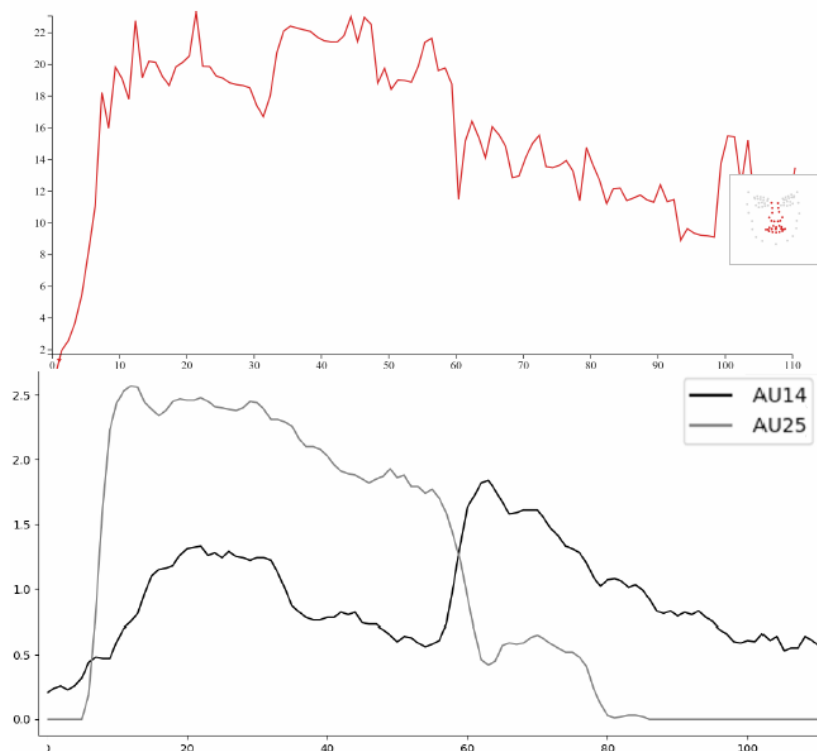
Рис. 3.6. Одиниці дій (AUs) та відповідні рухи м'язів обличчя, що використовуються в оцінці

Оскільки AUs, витягнуті на основі моделі машинного навчання, не мають притаманної їм пояснюваності, ми використовуємо нашу систему на основі топології для інтерпретації певних виявлених ознак AU шляхом порівняння їхніх вихідних даних.

Наш підхід ґрунтується на наступній гіпотезі: ми очікуємо спостерігати корельовані сигнали між активністю AUs та їхніми відповідними рисами обличчя, проаналізованими за допомогою нашого топологічного підходу. Для цього ми розглядаємо відносну відстань топології обличчя відносно першого кадру послідовності (нейтральної пози).



а) відраза Bottleneck (відстань "Пляшкового горлечка") очі+ніс / AU45



б) страх Wasserstein (відстань Вассерштейна) рот+ніс / AU14 + AU25

Рис. 3.7. Порівняння відносної відстані на псевдометричній топології (вгорі) з Одиницями Дій (AUs) (внизу) для суб'єкта F001

Рисунок 3.7 демонструє приклади цього взаємозв'язку. Приклад А (відраза, F001): при порівнянні активності носа та очей з AU45 (моргання) для емоції відрази (рисунок 3.7 а), відносна топологічна відстань демонструє три чіткі піки, які корелюють із піками активності AU45 (приблизно на кадрах 28, 52 та 75). Однак AU45 не повністю описує активність, зафіксовану топологією.

Приклад Б (страх, F001): Порівняння регіону рот + ніс з AU14 (ямки) та AU25 (розкриття губ) для емоції страху (рисунок 3.7 б) ілюструє, що топологія, ймовірно, є комбінацією декількох AUs. У цьому випадку траєкторія відносної відстані нагадує лінійну комбінацію активності AU14 та AU25, що дає повніше уявлення про активність регіону.

Подальший, більш широкий аналіз, що охоплює обох суб'єктів, різні емоції та множинні риси обличчя, підтверджує, що ці кореляційні взаємозв'язки спостерігаються широко, підтверджуючи нашу гіпотезу про сильну кореляцію між топологічними ознаками та AUs.

Незважаючи на сильну кореляцію, ідеального відношення "один до одного" між топологією та AUs не існує. AUs проходять подальшу контекстну обробку (наприклад, для диференціації активності AU7 (напруження повік) від AU45 (моргання)), ніж чиста топологія.

Проте, одним із ключових викликів контекстної обробки у сучасних афективних обчисленнях є брак пояснюваності. Наш підхід на основі топології пропонує прямий механізм для пояснення виявлених ознак, що є значною перевагою.

#### *3.4.1. Використання одиниць дій у розпізнаванні емоцій*

Одиниці дій (Action Units, AUs) є основним компонентом у системах розпізнавання емоцій, особливо тих, що базуються на системі кодування виразів обличчя.

Розглянемо яким чином ці одиниці використовуються:

##### 1. Кількісне представлення руху

AUs дозволяють перетворити складний, безперервний рух м'язів обличчя на дискретні, кількісно вимірювані одиниці. Замість того, щоб аналізувати пікселі або геометрію безпосередньо, система фокусується на ключових змінах, наприклад, чи піднята внутрішня частина брови (AU1) або чи відтягнутий кутик губ (AU12).

## 2. Кодування емоцій

Кожна базова емоція (за моделлю Екмана) відповідає певній комбінації та інтенсивності AUs.

Таблиця 3.2.

Кодування емоцій

Емоція	Типова конфігурація AUs
Щастя	AU6 (підняття щоки) + AU12 (відтягування кутика губ)
Сум	AU1 (внутрішнє підняття брови) + AU4 (опускання брови) + AU15 (опускання кутика губ)
Гнів	AU4 (опускання брови) + AU5 (підняття верхньої повіки) + AU7 (напруження повіки)
Здивування	AU1 + AU2 (підняття брови) + AU5 (підняття верхньої повіки) + AU26 (опускання щелепи)

## 3. Алгоритми класифікації

Отримані вектори інтенсивності AUs (наприклад, вектор  $\langle AU1, AU2, \dots, AU45 \rangle$ ) використовуються як ознаки (features) для навчання класифікаторів машинного навчання, таких як метод опорних векторів (SVM), нейронні мережі або байєсівські класифікатори.

Ці алгоритми вивчають, які патерни інтенсивності AUs найкраще відповідають кожній із цільових емоцій. Таким чином, AUs функціонують як зручний, біологічно значущий проміжний шар між необробленими відеоданими та фінальною класифікацією емоцій.

### 3.4.2. Співвідношення топології та одиниць дій

Пропонована система використовує стійкі гомології для аналізу структури 83 контрольних точок (landmarks) обличчя, тоді як AUs описують функціональні рухи м'язів.

## Опис одиниць дій і топологічної несхожості

Характеристика	Одиниці дій (AUs)	Топологічна несхожість
Природа ознаки	Функціональна, біологічна, категоріальна.	Геометрична, структурна, багатомасштабна.
Що вимірює	Інтенсивність локалізованого м'язового руху (наприклад, підняття кутика губ).	Зміна форми та зв'язності контурів обличчя (наприклад, формування циклу навколо відкритого рота).
Екстракція	Алгоритми машинного навчання (наприклад, OpenFace), часто з контекстною обробкою.	Математичні методи (Стійкі Гомології, Комплекс Ріпса) безпосередньо з 3D-координат.

Топологічна несхожість часто поводить як комбінація AUs, а не один конкретний AU. Якщо AU (наприклад, AU25 - розкриття губ) активує рух кількох контрольних точок рота, це призводить до значної топологічної зміни у цьому регіоні, що відображається у високій стійкості ознак  $H1$  (нові цикли) або  $H0$  (роз'єднання компонентів).

Приклад: відкриття рота (AU25) може створити новий великий цикл ( $H1$ ), який фіксується як сильна топологічна ознака.

AUs дають біологічну мітку, але топологія пропонує геометричний вимір цієї мітки. Наприклад, два різних рухи, які класифікуються як AU4 (опускання брови), можуть мати різну форму циклів (тунелів) у просторі, що буде диференційованою ознакою у діаграмах стійкості, але невидимою для простої інтенсивності AU.

Топологія надає пряме візуальне пояснення (через репрезентативні цикли) того, які саме контрольні точки обличчя спричинили топологічну зміну (наприклад, пік на графіку відносної відстані). Це долає проблему "чорної скриньки" алгоритмів AU. Наприклад, якщо топологічна відстань різко зростає, репрезентативний цикл може чітко показати, що це спричинено розтягуванням шкіри навколо носа та підняттям верхньої губи (комбінація AU9 та AU10).

У порівнянні з AU45 (моргання), топологічна відносна відстань показує піки, які корелюють з AU, але можуть бути вищими або ширшими. Це вказує на те, що топологічна несхожість є чутливішою до загальної деформації контуру обличчя, спричиненої м'язовою активністю, ніж проста числова інтенсивність AU.

Таким чином, запропонована система не просто дублює інформацію про AUs, а надає математично обґрунтований, багатомасштабний і візуально інтерпретований проксі для оцінки геометричних наслідків функціональної м'язової активності.

Фінальна оцінка була зосереджена на здатності топологічних ознак розрізняти кожного зі 101 суб'єкта в наборі даних BU4DFE. BU4DFE (Binghamton University 4D Face Expression Database) є одним із важливих еталонних наборів даних у галузі комп'ютерного зору та афективних обчислень, спеціально розробленим для досліджень міміки та 3D-реконструкції обличчя

### **3.5. Кластеризація топології обличчя за індивідуумами**

Для цієї оцінки було використано топологію повного обличчя, а візуалізація здійснювалася методами зниження розмірності (Dimensionality Reduction), зокрема t-SNE та UMAP.

#### **1. Аналіз вибірки (10 Суб'єктів)**

Спочатку ми проаналізували підмножину з 10 суб'єктів (F001–F010) для всіх шести емоцій, використовуючи t-SNE (рисунок 3.8 а – к).

Результати були наступними.

Для всіх шести емоцій було виявлено, що десять суб'єктів формують відносно незалежні кластери. Це явище було найбільш вираженим для емоцій гніву (рисунок 3.8а) та суму (рисунок 3.8 і), тоді як для інших емоцій спостерігалось лише незначне перекриття між кластерами окремих індивідуумів.

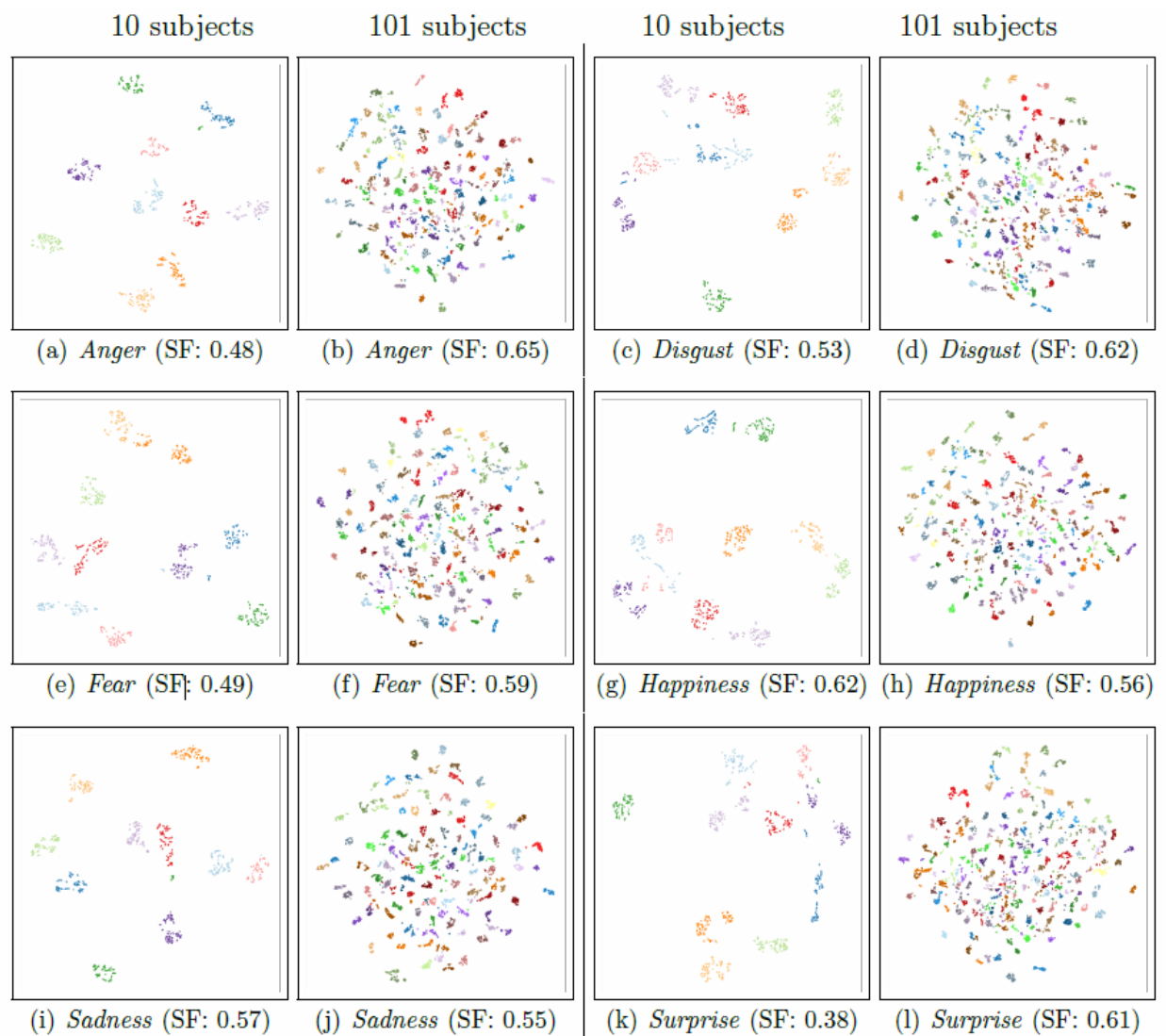


Рис. 3.8. Порівняння кластеризації 10 суб'єктів (вгорі) та всіх 101 суб'єкта (внизу) за допомогою t-SNE. Кожен графік включає відповідність SF для оцінки якості збереження відстаней

Висновок. Топологічні ознаки обличчя зберігають достатньо інформації про унікальні анатомічні та динамічні характеристики кожного суб'єкта, щоб забезпечити їхню ефективну сегрегацію.

## 2. Масштабування до всього набору даних (101 Суб'єкт)

Подібна оцінка була проведена для всіх 101 суб'єкта (58 жінок та 43 чоловіки) (Рисунок 3.8 b до 3.8 l).

Результати наступні. Поведінка кластеризації, що спостерігалася у вибірці 10 суб'єктів, успішно масштабується на весь набір даних. Це

підтверджує, що топологічні ознаки є надійними дискримінаторами індивідуальності, незалежно від розміру вибірки.

Важливим аспектом при застосуванні методів зниження розмірності, таких як t-SNE та UMAP, є стабільність проєкції до змін гіперпараметрів (наприклад, перплексії для t-SNE або кількості сусідів для UMAP). Зміна цих параметрів може суттєво вплинути на візуалізовану топологію представлення емоцій.

Для перевірки стійкості (робастності) результатів t-SNE ми провели серію розрахунків з чотирма різними значеннями перплексії (30, 40, 50 та 100).

Результати наступні. Кластери, що відповідають окремим індивідуумам, залишалися приблизно постійними в усьому діапазоні тестованих значень перплексії (див. рисунки 3.8 – 3.11).

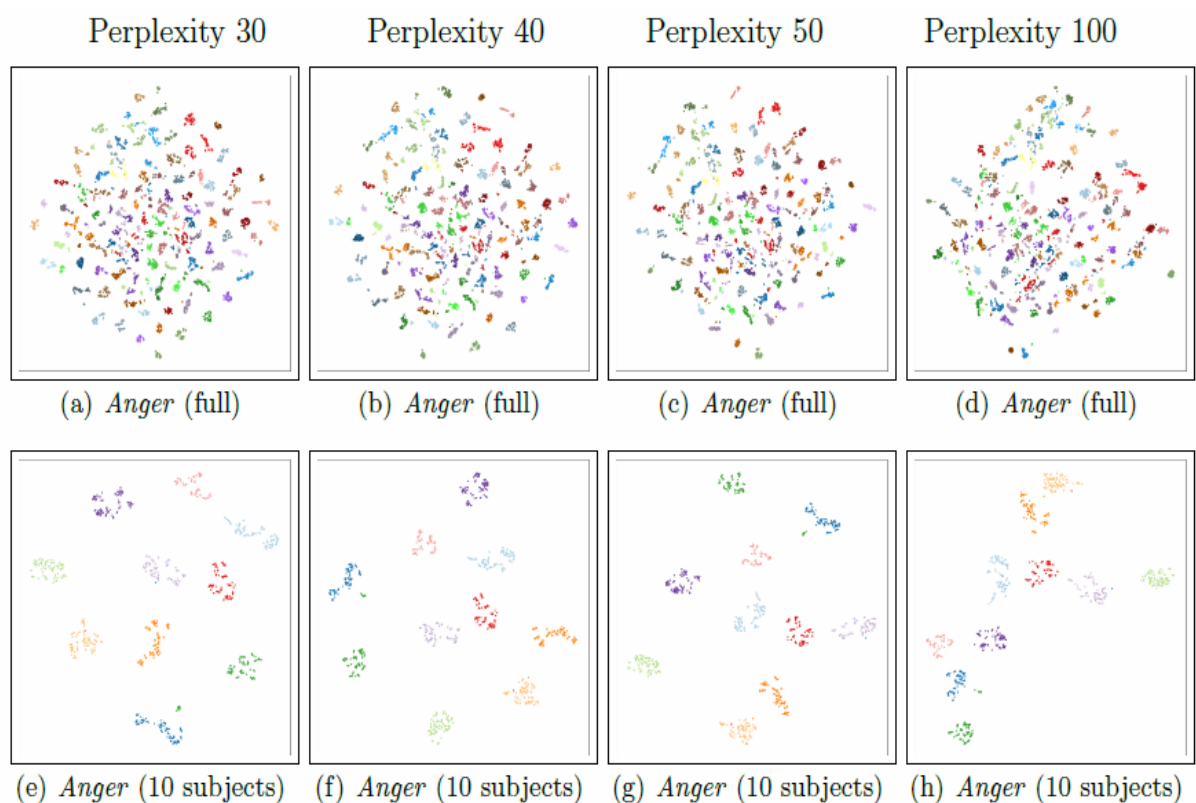


Рис. 3.9. Кластеризація t-SNE індивідуальних топологічних даних для емоції

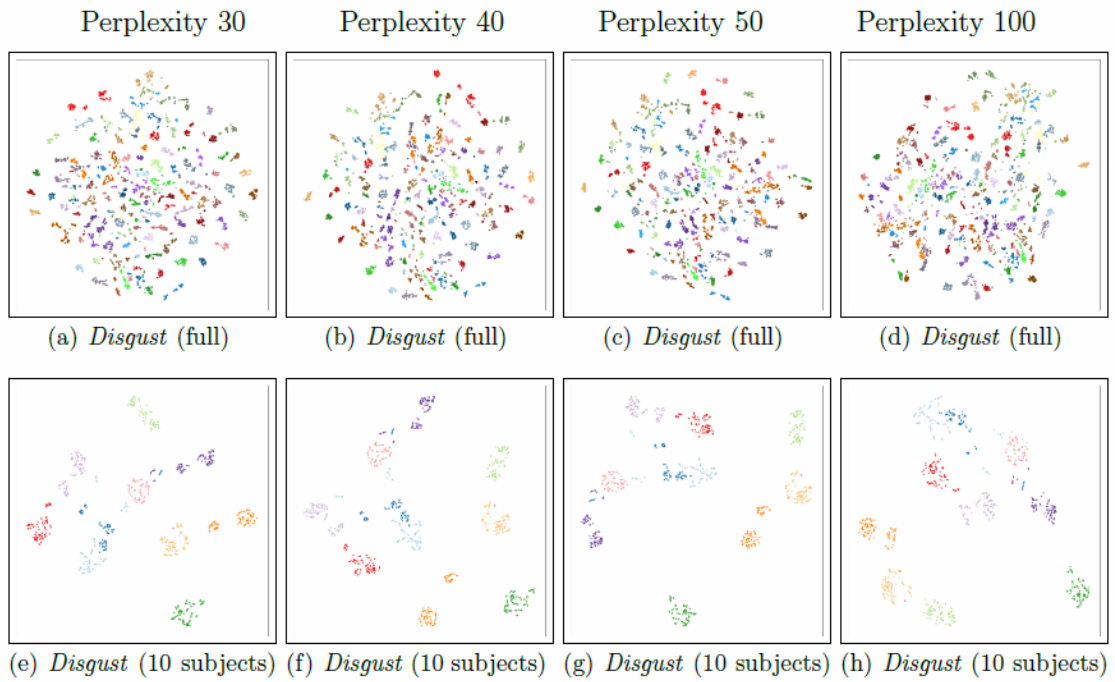


Рис. 3.10. Кластеризація t-SNE індивідуальних топологічних даних для емоції відраза

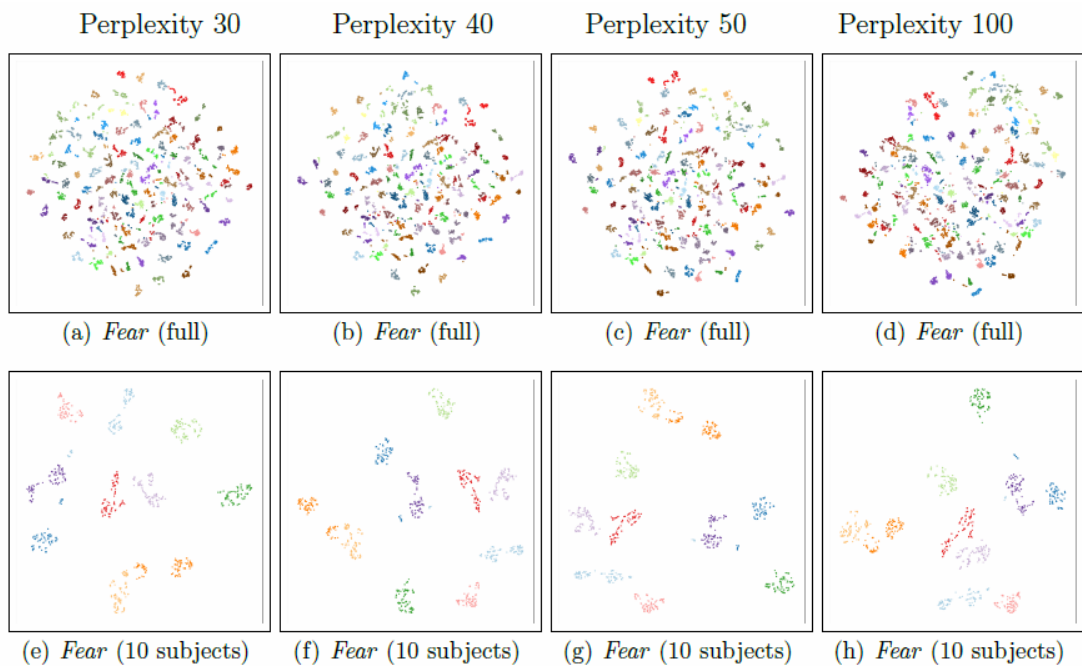


Рис. 3.11. Кластеризація t-SNE топологічних даних для емоції страх

Крім того, явище чіткої індивідуальної кластеризації, яке було виявлене за допомогою t-SNE, також було відтворено при використанні альтернативного методу UMAP (див. рисунки 3.12 – 3.14).

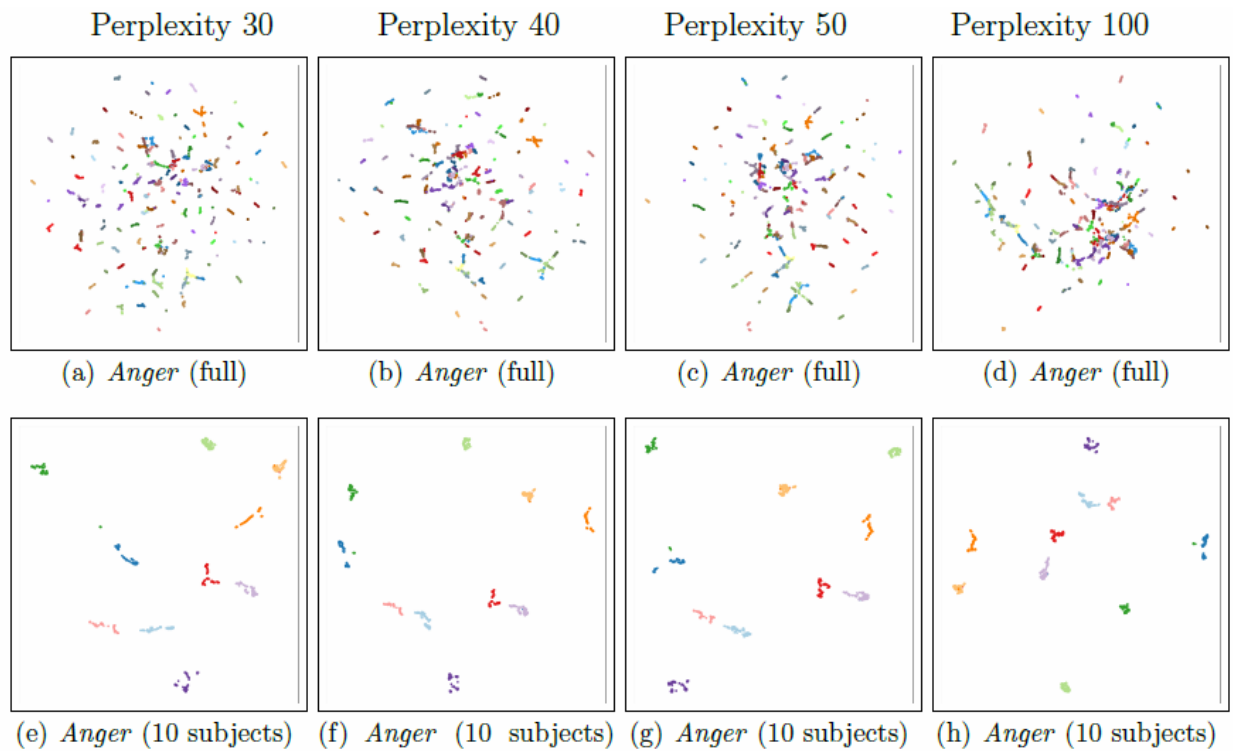


Рис. 3.12. Кластеризація UMAP індивідуальних топологічних даних для емоції гнів

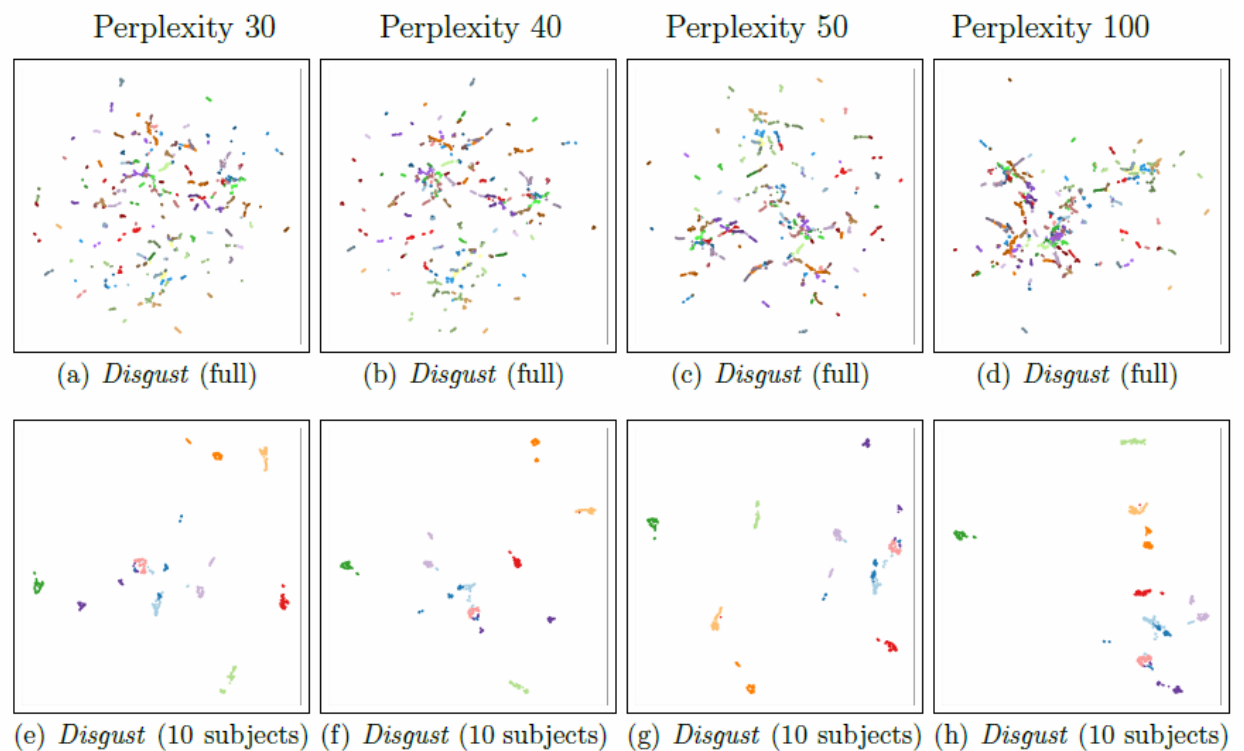


Рис. 3.13. Кластеризація UMAP індивідуальних топологічних даних для емоції відраза

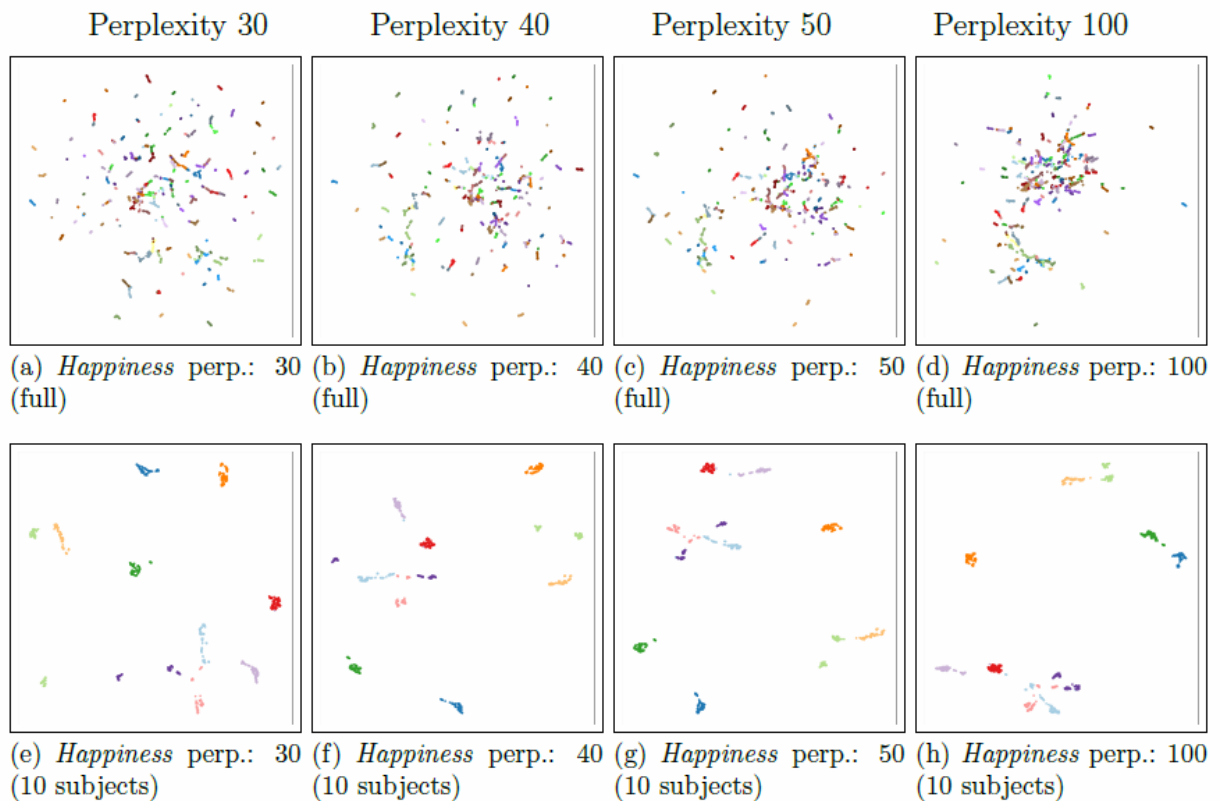


Рис. 3.14. Кластеризація UMAP індивідуальних топологічних даних для емоції щастя

Як висновок можна констатувати, що топологічний підхід забезпечує не лише ефективне розрізнення емоційних станів, але й високу дискримінаційну здатність щодо ідентичності суб'єкта, при цьому результати кластеризації є стійкими до варіацій параметрів проєкції.

Отже, ми продемонстрували, що використання топологічного аналізу даних (TDA) дозволяє ефективно розрізняти та глибше розуміти часові патерни, які існують між емоційними виразами. Інтеграція TDA з підходами машинного навчання у сфері афективних обчислень надає потужний інструмент для оцінки та пояснення конкретних аспектів даних. Зокрема, TDA може ідентифікувати, які частини обличчя спричинили класифікацію алгоритмом ML певної емоції, або пояснити причини помилкових діагнозів чи недоліків моделі (наприклад, чому щастя було помилково розпізнано як гнів).

Зважаючи на складність виявлення одиниць дій (AUs) та класифікації емоцій, ми припускаємо, що підхід на основі TDA надає нові інсайти щодо цих викликів. Оскільки було доведено, що часова інформація AUs полегшує завдання розпізнавання емоцій, наш підхід оцінює часові вирази, пропонуючи нове візуальне представлення цих даних.

Обмеженням сучасних моделей ML для виявлення AU є недостатня точність, з мінімальним покращенням порівняно з попередніми моделями. Це часто пов'язано з хибним виявленням неактивних AUs або нездатністю виявити активні AUs. Підхід на основі TDA може слугувати для валідації того, чи правильно виявлені AUs фіксують фактичний рух м'язів обличчя.

Спільна поява AUs та патерни їхньої активації є критичними для точності моделей ML. Наш підхід дає змогу отримати уявлення про численні AUs, що виникають разом, включаючи специфічні конфігурації під час вираження емоцій.

Незважаючи на значні досягнення ML у різних галузях (медицина, безпека, освіта), одним з його основних обмежень залишається відсутність пояснюваності (explainability), особливо у випадку архітектур "чорної скриньки", як-от нейронні мережі. Однією з ключових переваг TDA є внутрішня пояснюваність ознак, виявлених у процесі. Ми продемонстрували це на прикладі поз здивування, які включають відкриття та закриття очей та рота. Тоді як модель ML може виявити довгий список пов'язаних AUs (AU1, AU2, AU5, AU25, AU26), TDA дозволяє прямо візуалізувати змінні ознаки.

На діаграмах стійкості кількість та стійкість найбільш важливих ознак чітко диференціюються. При оцінці репрезентативних циклів ми можемо безпосередньо асоціювати геометрію контрольних точок із кожною ознакою високої стійкості, надаючи фізичне пояснення топологічних змін у даних.

Значна частина досліджень, спрямованих на автоматичне виявлення AUs, зосереджувалася на вивченні окремих AUs ізольовано. Проте, було доведено, що патерни (спільна поява) AUs можуть мати вирішальний вплив

на точність виявлення. Це призводить до глибшого обмеження сучасних підходів: якості та кількості навчальних даних.

Сучасні моделі ML потребують великої кількості високоякісних даних для досягнення точності. Однак доступні набори даних часто мають етнічні упередження, а також значний дисбаланс у розподілі AUs. Наприклад, деякі AUs (наприклад, AU6 або AU12) виникають значно частіше. Дані "істини в останній інстанції" (ground truth) для AUs часто ануються вручну експертами. Цей процес є суб'єктивним і схильний до помилок. Як наслідок, моделі ML можуть навчатися не стільки представленню самих AUs, скільки розподілу та упередженням у навчальних даних.

Численні AUs часто виникають одночасно (спільна поява). Це призводить до невирішеного дисбалансу даних для рідкісних комбінацій AUs порівняно з AUs, що виникають частіше. Ці виклики сукупно призводять до створення моделей ML, які мають низьку надійність: вони часто не здатні розпізнати активні AUs, і, водночас, неправильно розпізнають неактивні AUs як активні.

### **Висновки до розділу**

У третьому розділі було розглянуто практичні аспекти реалізації розробленої методології та побудовано архітектуру системи для моделювання, аналізу та симуляції емоцій людини. Реалізований інтерфейс візуально-аналітичної системи продемонстрував ефективність інтерактивних методів подання топологічних характеристик. Було встановлено, що візуалізація діаграм стійкості та репрезентативних циклів значно покращує інтерпретованість результатів та сприяє глибшому розумінню структури даних. У межах дослідження також проведено емпіричну оцінку обчислювальної продуктивності, що дозволило визначити оптимальні параметри для стабільної роботи алгоритмів TDA. Аналіз співвідношення між топологічними ознаками та одиницями дій засвідчив наявність

кореляцій, які можуть слугувати основою для автоматизованої інтерпретації мімічної активності. Імплементация методів кластеризації дала змогу виявити індивідуальні патерни емоційної експресивності та розширила можливості персоналізованого аналізу. Інтеграція TDA у загальну архітектуру системи підтвердила, що методологія здатна працювати у реальних умовах та забезпечувати високу надійність. Оцінка результуючих моделей показала, що топологічні характеристики зберігають свою стійкість навіть за умов варіативності вхідних даних. Отримані результати також засвідчили значний потенціал використання топологічних структур у складних багатокomпонентних моделях емоцій.

## ВИСНОВКИ

У процесі виконання магістерської роботи було проведено дослідження методологій, інструментальних засобів та стратегій застосування топологічного аналізу даних (Topological Data Analysis, TDA) для моделювання, симуляції та візуалізації емоційних станів людини. Результати дослідження охоплюють теоретичні аспекти афективних обчислень, системну оцінку сучасних методів розпізнавання емоцій, аналіз можливостей TDA у контексті морфологічних змін обличчя, а також практичну імплементацію архітектури системи візуально-аналітичного моделювання емоцій.

У першому розділі було здійснено ґрунтовне дослідження предметної області топологічного аналізу даних у контексті афективних обчислень. Проаналізовано ключові концепції TDA, зокрема стійкі гомології, діаграми стійкості, репрезентацію топологічних характеристик та принципи їх візуалізації. Обґрунтовано вибір топологічного підходу як альтернативи та доповнення до традиційних методів, виходячи з його здатності виявляти інваріантні структурні особливості складних даних, що залишаються стійкими до шумів, оклюзії та варіацій у даних. Показано, що топологічний аналіз здатен захоплювати глобальні та локальні характеристики простору поз обличчя, які не відтворюються класичними дескрипторами.

Другий розділ було присвячено сучасним методам розпізнавання мімічних виразів, специфічності вибору ознак та підходам до візуалізації афективних станів індивідуума та групи. Виконано аналітичний огляд літератури щодо моделей розпізнавання емоцій, включно з методами на основі геометричних ознак, текстурних дескрипторів, глибинних нейронних мереж та комбінованих підходів. Особлива увага була приділена набору даних BU4DFE, який став основою для подальших експериментів. Продемонстровано, як просторово-орієнтована топологічна методологія дозволяє екстрагувати стійкі гомологічні структури з контрольних точок

обличчя, оцінювати їхню важливість та визначати топологічну несхожість між різними позами. Запропоновано псевдометрику, що дозволяє враховувати внутрішню зв'язність обличчя та підвищувати точність топологічних оцінок, особливо у випадках складних та дрібних мімичних змін. Проведено порівняльний аналіз топологічних відстаней, який підтвердив доцільність TDA як інструменту для оцінки морфологічних відмінностей між емоційними станами.

У третьому розділі розроблено та представлено архітектуру системи для візуалізації, моделювання та симуляції емоцій на основі топологічних характеристик. Реалізовано інтерфейс візуально-аналітичної системи, який забезпечує інтерактивний доступ до діаграм стійкості, репрезентативних циклів та інших топологічних компонентів. Виконано емпіричну оцінку обчислювальної продуктивності та визначено оптимальні параметри для ефективного застосування методів стійких гомологій у задачах афективного аналізу. Проведено порівняльний аналіз між топологічними характеристиками та одиницями дій (Action Units, AU), що дозволило встановити кореляцію між топологічними змінами геометрії обличчя та активацією окремих мімичних м'язів. Додатково реалізовано кластеризацію топологічних ознак за індивідуумами, що продемонструвало можливість урахування індивідуальних патернів мімичної поведінки.

Узагальнюючи отримані результати, можна стверджувати, що застосування топологічного аналізу даних у моделюванні емоцій людини є перспективним та науково обґрунтованим напрямом. TDA забезпечує виявлення глибинних структур даних, які є стійкими до перешкод та варіативності, дозволяє ефективно порівнювати морфологічні особливості емоційних поз та створює передумови для побудови інтерпретованих і надійних систем афективної аналітики. Розроблена методологія та реалізована архітектура системи підтверджують можливість інтеграції топологічного підходу з сучасними технологіями комп'ютерного зору, що відкриває нові перспективи у створенні систем підтримки прийняття рішень,

адаптивних інтерфейсів, а також у дослідженнях поведінкової та емоційної динаміки людини.

Отримані результати створюють наукове підґрунтя для подальших робіт, спрямованих на розширення моделей симуляції емоцій, інтеграцію багатомодальних даних, удосконалення топологічних метрик та використання методів глибокого навчання у поєднанні з топологічними ознаками.

## ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Carlsson, G. “Topology and Data.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, Providence: AMS, 2009, pp. 255–308.
2. Edelsbrunner, H., Harer, J. “Persistent Homology – A Survey.” *Contemporary Mathematics*, vol. 453, Providence: AMS, 2008, pp. 257–282.
3. Zomorodian, A., Carlsson, G. “Computing Persistent Homology.” *Discrete & Computational Geometry*, Springer, New York, 2005, pp. 249–274.
4. Lum, P. Y. et al. “Extracting Insights from the Shape of Complex Data Using Topology.” *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, London, 2013, pp. 1–10.
5. Chazal, F., Michel, B. “An Introduction to Topological Data Analysis: Fundamental and Practical Aspects.” *arXiv*, Cornell University, 2017, pp. 1–60.
6. Ghrist, R. “Barcodes: The Persistent Topology of Data.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, Providence: AMS, 2008, pp. 61–75.
7. Singh, G., Memoli, F., Carlsson, G. “Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets.” *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics*, Geneva: Eurographics Association, 2007, pp. 91–100.
8. Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., Harer, J. “Stability of Persistence Diagrams.” *Discrete & Computational Geometry*, Springer, 2007, pp. 103–120.
9. Wasserman, L. “Topological Data Analysis.” *Annual Review of Statistics and Its Application*, Palo Alto: Annual Reviews, 2018, pp. 501–532.
10. Carlsson, G., Silva, V. “Zigzag Persistence.” *Foundations of Computational Mathematics*, Springer, 2010, pp. 367–405.
11. Picard, D. et al. “Topological Data Analysis for Image-Based Emotion Recognition.” *IEEE Transactions on Affective Computing*, IEEE Press, New York, 2021, pp. 1–14.

12. Goodfellow, I. et al. "Challenges in Representation Learning: A Report on Three Machine Learning Contests." *Neural Networks*, Elsevier, Amsterdam, 2015, pp. 117–124.
13. Ekman, P., Friesen, W. "Constants Across Cultures in the Face and Emotion." *Journal of Personality and Social Psychology*, APA, Washington, 1971, pp. 124–129.
14. Pantic, M., Rothkrantz, L. "Automatic Analysis of Facial Expressions: The State of the Art." *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, IEEE Press, 2000, pp. 1424–1445.
15. Shen, Y. et al. "Deep Learning-Based Emotion Recognition: A Survey." *ACM Computing Surveys*, ACM Press, New York, 2021, pp. 1–33.
16. Zheng, W.-L., Lu, B.-L. "Investigating Critical Frequency Bands and Channels for EEG-based Emotion Recognition." *IEEE Transactions on Affective Computing*, IEEE Press, 2015, pp. 139–151.
17. Zhao, X. et al. "Facial Expression Recognition via Deep Learning." *IEEE International Conference on Computer Vision*, Venice: IEEE Press, 2017, pp. 2130–2139.
18. Zhang, X. et al. "Joint Detection and Classification of Facial Expressions Using CNN." *Computer Vision and Image Understanding*, Elsevier, Amsterdam, 2018, pp. 1–10.
19. Li, S., Deng, W. "Deep Facial Expression Recognition: A Survey." *IEEE Transactions on Affective Computing*, IEEE Press, 2020, pp. 1–25.
20. Calvo, R. A., D'Mello, S. "Affect Detection: An Interdisciplinary Review." *Affective Computing and Intelligent Interaction*, Springer, Berlin, 2010, pp. 18–26.
21. Jiang, R. et al. "Topological Feature Extraction for Image Classification." *Pattern Recognition*, Elsevier, 2019, pp. 160–172.
22. Fasy, B. T. et al. "Confidence Sets for Persistence Diagrams." *Annals of Statistics*, IMS, 2014, pp. 2301–2339.

- 23.Obayashi, I., Hiraoka, Y. “Persistence Diagrams with Linear Machine Learning Models.” *Journal of Applied and Computational Topology*, Springer, 2021, pp. 1–27.
- 24.Reininghaus, J. et al. “A Stable Multi-Scale Kernel for Topological Machine Learning.” *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Boston: IEEE Press, 2015, pp. 4741–4748.
- 25.Hofer, C. et al. “Deep Learning with Topological Signatures.” *Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, Vancouver: Curran Associates, 2017, pp. 1633–1643.
- 26.Adams, H. et al. “Persistence Images: A Stable Vector Representation of Persistent Homology.” *Journal of Machine Learning Research, JMLR*, 2017, pp. 218–252.
- 27.Carrière, M., Cuturi, M., Oudot, S. “Sliced Wasserstein Kernel for Persistence Diagrams.” *International Conference on Machine Learning*, Sydney: PMLR, 2017, pp. 664–673.
- 28.Bendich, P., Wang, B. “Local Homology and Facial Image Analysis.” *IEEE International Conference on Image Processing*, Phoenix: IEEE Press, 2016, pp. 4523–4527.
- 29.Nicolau, M., Levine, A. “Topological Analysis of Breast Cancer Gene Expression Data.” *PNAS*, National Academy Press, Washington, 2011, pp. 472–477.
- 30.Bubenik, P. “Statistical Topological Data Analysis Using Persistence Landscapes.” *Journal of Machine Learning Research, JMLR*, 2015, pp. 77–102.
- 31.Cohn, J. F., De la Torre, F. “Automated Face Analysis for Affect Recognition.” *Oxford Handbook of Affective Computing*, Oxford University Press, 2014, pp. 131–150.
- 32.Sariyanidi, E., Gunes, H., Cavallaro, A. “Automatic Analysis of Facial Affect.” *IEEE Transactions on Affective Computing*, IEEE Press, 2015, pp. 165–183.

33. Busso, C. et al. "IEMOCAP: Interactive Emotional Dyadic Motion Capture Database." *Language Resources and Evaluation*, Springer, 2008, pp. 335–359.
34. Scherer, K. "Psychological Models of Emotion." *International Handbook of Emotions Research*, Cambridge University Press, 2013, pp. 137–156.
35. Barrett, L. F. "The Theory of Constructed Emotion." *Psychological Review*, APA, 2017, pp. 413–445.
36. Martinez, A. M. "Computational Methods for Facial Expression Analysis." *Image and Vision Computing*, Elsevier, 2003, pp. 119–131.
37. Hassan, M. et al. "Emotion Recognition Using Machine Learning." *Pattern Recognition Letters*, Elsevier, 2021, pp. 45–54.
38. Krizhevsky, A., Sutskever, I., Hinton, G. "ImageNet Classification with Deep Convolutional Networks." *Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, Curran Associates, 2012, pp. 1097–1105.
39. King, D. "Dlib-ml: A Machine Learning Toolkit." *Journal of Machine Learning Research*, JMLR, 2009, pp. 1755–1758.
40. Viola, P., Jones, M. "Robust Real-Time Face Detection." *International Journal of Computer Vision*, Springer, 2004, pp. 137–154.