

БАКАЛАВРСЬКА РОБОТА

БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ

Група АКП-22-01

Лудчак Ярослав

2026

Міністерство освіти і науки України
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
Факультет автоматизації та енергетики
Кафедра автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій

Лудчак Ярослав Ярославович

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК

681.53

(індекс)

БАКАЛАВРСЬКА РОБОТА

Автоматизоване управління механічною системою з діагностування

(назва роботи)

акселерометра

Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

(назва освітньої програми)

174 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

(шифр і назва спеціальності)

Робота містить результати власних досліджень, використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Нормоконтроль

доцент

О.В. Кучмистенко

(посада)

(підпис)

(дата)

(ініціали та прізвище)

Рецензент

доцент

І.І. Чигур

(посада)

(підпис)

(дата)

(ініціали та прізвище)

Здобувач освітнього ступеня

АКП-22-1

Я.Я. Лудчак

(шифр групи)

(підпис)

(дата)

(ініціали та прізвище)

Науковий керівник

доцент

В.В. Процюк

(посада)

(підпис)

(дата)

(ініціали та прізвище)

Допущено до захисту

Завідувач кафедри

доцент

А.І. Лагойда

(посада)

(підпис)

(дата)

(ініціали та прізвище)

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

(повне найменування закладу вищої освіти)

Факультет автоматизації та енергетики

Кафедра автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій

Освітній рівень перший (бакалаврський)

Спеціальність 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри АКІТ

А.І. Лагойда

« » 2026 року

З А В Д А Н Н Я
НА БАКАЛАВРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Лудчаку Ярославу Ярославовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Моделювання та синтез системи керування 2-координатним ХУ-столом для калібрування ІМУ

керівник роботи Процюк Володимир Васильович к.т.н., доцент

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом закладу вищої освіти від «29» травня 2026 року № 192/7

2. Строк подання студентом роботи 12.06.2026

3. Вихідні дані до роботи матеріали переддипломної практики, методичні вказівки, технічна література, інтернет-ресурс.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вступ.

1 Аналіз технологічного процесу калібрування іму на ху-столи як об'єкта автоматичного керуванн;

2 Математичне моделювання і ідентифікація об'єкта керування;

3 Синтез та аналіз системи автоматичного керування;

4 Загальні висновки;

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Лист1 – Схема об'єкта керування ХУстола

Лист2 – Схема системи керування ХУ - стола

Лист3 – Схема електромеханічної системи

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 06.11.2025 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів бакалаврської роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Аналіз процесу тестування і калібрування акселерометрів, постановка задачі	15.03.2026	
2	Математична модель електромеханічної осі XY-стола, лінеаризація	30.03.2026	
3	Обчислення параметрів моделі синтез регуляторів, дослідження стійкості	13.04.2026	
4	Розробка прошивки контролера двигунів (ESP32/DRV8825, G-code/GRBL)	25.04.2026	
5	Розробка прошивки модуля	5.05.2026	
6	Розробка Flask-сервера	15.05.2026	
7	Експериментальна перевірка	25.05.2026	

Студент _____
(підпис)

Я. Я. Лудчак _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

В. В. Процюк _____
(ініціали та прізвище)

АНОТАЦІЯ

Бакалаврська робота містить: 60 сторінок друкованого тексту, 24 рисунки, 12 таблиць, 12 переліків посилань на джерела.

Тема: «Автоматизоване управління механічною системою з діагностування акселерометра».

Об'єкт дослідження: процес калібрування інерціальних вимірювальних модулів (IMU) шляхом відтворення програмованих еталонних траєкторій на двокоординатному електромеханічному XY-столі.

Мета роботи: моделювання та синтез системи автоматичного керування 2-координатним XY-столом для калібрування IMU шляхом побудови математичної моделі електромеханічної осі, синтезу регуляторів методом розміщення полюсів та розробки апаратно-програмного комплексу на доступній елементній базі.

Методи дослідження: Лінеаризація в околі робочої точки; синтез регуляторів методом розміщення полюсів; аналіз стійкості за критерієм Рауса–Гурвіца та якості перехідних процесів; комп'ютерне моделювання у середовищі MatLab; реалізація на мікроконтролерах ESP32 та серверному застосунку Python/Flask.

Результати кваліфікаційної роботи: Синтезовано ПД-регулятори обох осей методом розміщення полюсів: підтверджено стійкість за критерієм Рауса–Гурвіца, перерегулювання не перевищує 10 %, статична похибка відсутня, точність позиціонування $\pm 0,5$ мм. Розроблено апаратно-програмний комплекс: контролер кроковими двигунами (ESP32/DRV8825, сумісний з GRBL), модуль зчитування MPU6050 з алгоритмом ESKF/ZUPT та веб-застосунок Flask з генерацією траєкторій і алгоритмом обрізання Ліанга–Барскі.

Ключові слова: XY-стіл, калібрування IMU, MPU6050, кроковий двигун NEMA17, ESP32, DRV8825, математична модель, метод розміщення полюсів, ESKF, ZUPT, генерація траєкторій, Flask, GRBL.

ABSTRACT

The bachelor's thesis contains: 60 pages of printed text, 24 figures, 14 tables, 12 references.

Topic: “ Automated control of a mechanical system with accelerometer diagnostics ”.

Object of research: the calibration process of inertial measurement units (IMU) by reproducing programmable reference trajectories on a two-axis electromechanical XY stage.

Purpose of the work: to model and synthesise an automatic control system for a two-axis XY stage for IMU calibration by constructing a mathematical model of the electromechanical axis, synthesising controllers using the pole-placement method, and developing a hardware–software system on accessible components that ensures accurate reproduction of reference trajectories and processing of inertial sensor signals.

Research methods: Stability analysis using the Routh–Hurwitz criterion and transient quality assessment; computer simulation in the MatLab environment; implementation on ESP32 microcontrollers and a Python/Flask server application.

Results of the qualification work: PD controllers for both axes were synthesised using the pole-placement method: stability was confirmed by the Routh–Hurwitz criterion, overshoot does not exceed 10 %, steady-state error is zero, positioning accuracy is ± 0.5 mm. A hardware–software system was developed: a stepper-motor controller (ESP32/DRV8825, GRBL-compatible), an MPU6050 reader module with an ESKF/ZUPT algorithm, and a Flask web application with trajectory generation and Liang–Barsky clipping.

Keywords: XY stage, IMU calibration, MPU6050, NEMA17 stepper motor, ESP32, DRV8825, mathematical model, automatic control system, pole-placement method, ESKF, ZUPT, trajectory generation, Flask

ЗМІСТ

ВСТУП	14
1 АНАЛІЗ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ КАЛІБРУВАННЯ ІМУ НА ХУ-СТОЛІ ЯК ОБ’ЄКТА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ....	17
1.1 Призначення установки та суть процесу.....	17
1.2 Характеристика продукції, сировини та реагентів	21
1.3 Аналіз технологічної схеми установки ХУ-стола	22
1.4 Технічна характеристика технологічного обладнання	25
1.5 Вибір та обґрунтування параметрів контролю і регулювання	26
2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ’ЄКТА КЕРУВАННЯ.....	29
2.1 Обґрунтування вибору об’єкта автоматизації.....	29
2.1.1 Динаміка крокового двигуна.....	30
2.1.2 Рівняння механічної частини	30
2.1.3 Моменти опору	31
2.1.4 Повна математична модель однієї осі.....	31
2.1.5 Двовимірний модель ХУ-стола	32
2.2 Визначення характеристик об’єкта автоматизації.....	33
2.2.1 Лінеаризація в околі робочої точки.....	33
2.2.2 Передавальні функції.....	34
2.2.3 Матрична модель у просторі станів	35
3 СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ..	38
3.1 Синтез одноконтурної системи автоматичного керування	38
3.1.1 Обчислення параметрів математичної моделі	38
3.1.2 Структура системи керування	40
3.1.3 Регулятор контуру положення	41
3.1.4 Метод розміщення полюсів.....	42
3.2 Дослідження стійкості та оцінка показників якості	44

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ			
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	Автоматизоване управління механічною системою з діагностування акселерометра	Літ.	Арк.	Аркуші
Розроб.		Людчак Я.Я.						
Перевір.		Процюк В.В.					13	72
Реценз.		Чигур І.				АКП-22-01 ІФНТУНГ		
Н. контр.		Кучмистенко О.В.						
Затверд.		Лагоїда А. І.						

3.2.1 Оцінка стійкості за критерієм Рауса–Гурвіца	44
3.2.2 Показники якості керування	45
3.2.3 Частотні характеристики та смуга пропускання.....	46
3.3 Аналіз роботи розроблених систем автоматичного керування.....	47
3.3.1 Перехідні характеристики	47
3.3.2 Тестові траєкторії калібрування	48
3.3.3 Моделювання руху по траєкторії «Коло».....	49
3.3.4 Аналіз результатів.....	51
4 РОЗРОБКА ПРОЕКТНОЇ СКЛАДОВОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	53
4.1 Вибір технічних засобів автоматизації	53
4.1.1 Вибір первинного перетворювача (датчика).....	53
4.1.2 Вибір виконавчого пристрою та драйвера.....	54
4.1.3 Вибір контролера.....	54
4.2 Розробка проектних рішень для нижнього рівня.....	55
4.2.1 Контролер кроковими двигунами	55
4.2.2 Модуль зчитування ІМУ та відновлення траєкторії	57
4.3 Розробка додаткових проектних рішень.....	60
4.4 Розробка проектних рішень для верхнього рівня	62
4.5 Розробка програмного забезпечення для контролера	66
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	69
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ НА ДЖЕРЕЛА	71
Додаток А Лістинг серверного застосунку (фрагменти)	72
Додаток Б Лістинг прошивки модуля зчитування ІМУ	73

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

АЦП – аналого-цифровий перетворювач

GT2 – тип зубчастого ременя з кроком 2 мм

ПЗ – програмне забезпечення

САК – система автоматичного керування

ШИМ – широтно-імпульсна модуляція

DMP – Digital Motion Processor (цифровий процесор руху MPU6050)

ESKF – Error-State Kalman Filter (фільтр Калмана у формі помилкового стану)

GT2 – тип зубчастого ременя з кроком 2 мм

IMU – Inertial Measurement Unit (інерціальний вимірювальний модуль)

I²C – Inter-Integrated Circuit (послідовний інтерфейс шини)

MEMS – Micro-Electro-Mechanical Systems (мікроелектромеханічні системи)

NEMA17 – типорозмір корпусу крокового двигуна (42×42 мм)

PID/ПІД – пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор

RDP – алгоритм Рамера–Дугласа–Пекера спрощення ламаної

SG – фільтр Савіцького–Голя

USB – Universal Serial Bus (універсальна послідовна шина)

ZUPT – Zero-Velocity Update (корекція за нульовою швидкістю)

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						13
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ВСТУП

Інерціальні навігаційні системи (INS) на основі мікроелектромеханічних систем (MEMS) широко застосовуються в безпілотних літальних апаратах, автономних транспортних засобах, робототехніці, носимій електроніці та інших високотехнологічних галузях. Ключовим компонентом таких систем є інерціальний вимірювальний модуль (IMU — Inertial Measurement Unit), який містить гіроскопи та акселерометри для визначення кутової швидкості та лінійного прискорення об'єкта. Точність визначення положення й орієнтації об'єкта безпосередньо залежить від точності первинних інерціальних датчиків.

Точність роботи IMU значною мірою визначається якістю його калібрування. Калібрування передбачає визначення систематичних похибок датчиків — зміщення нуля, похибки масштабного коефіцієнта, перекосу й неортогональності осей та нелінійностей. Для проведення калібрування необхідно забезпечити відтворювані еталонні рухи IMU з відомими параметрами переміщення, швидкості та прискорення. Якщо для статичного калібрування достатньо поворотного пристосування у полі сили тяжіння, то для перевірки динамічних характеристик датчика та відтворення складних еталонних траєкторій потрібен програмований механічний засіб переміщення.

У роботі як такий засіб розглядається двокоординатний ХУ-стіл — електромеханічна платформа, що переміщує закріплений на ній IMU у площині за двома ортогональними осями (Х та Y) з контрольованою швидкістю та прискоренням. Стіл дозволяє відтворювати типові тестові траєкторії — прямолінійний рух, коло, квадрат, вісімку, довільну параметричну криву, — що дає змогу як перевіряти динамічні характеристики датчика, так і формувати набори даних для оцінювання алгоритмів обробки сигналів IMU.

Метою роботи є розробка математичної моделі та синтез системи автоматичного керування 2-координатним ХУ-столом, призначеним для калібрування IMU, а також розробка апаратно-програмного комплексу, що реалізує генерацію еталонних траєкторій і обробку сигналів інерціального модуля.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						14
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Актуальність роботи зумовлена зростаючими вимогами до точності MEMS-сенсорів та потребою в доступних засобах калібрування, які можуть бути реалізовані на базі широкодоступних компонентів — крокових двигунів NEMA17, драйверів DRV8825, мікроконтролерів ESP32 та інерціального модуля MPU6050. На відміну від дорогих лабораторних поворотних столів, такий комплекс може бути відтворений у навчальній лабораторії та інтегрований із власним програмним забезпеченням.

У роботі розглядається електромеханічна система, де входом є напруга (усереднений ШІМ-сигнал), що подається на драйвер крокового двигуна, а виходом — лінійне переміщення каретки вздовж відповідної осі. Математичну модель побудовано на основі рівнянь динаміки крокового двигуна з урахуванням інерції навантаження, тертя та ремінної передачі.

Основні задачі роботи:

- проаналізувати ХУ-стіл як об’єкт автоматичного керування: його призначення, конструкцію, технологічний процес калібрування, обладнання та параметри, що підлягають контролю й регулюванню;
- побудувати математичну модель одновісної електромеханічної системи ХУ-стола та двовимірну модель об’єкта з урахуванням перехресного зв’язку між осями;
- лінеаризувати отриману модель в околі робочої точки й обчислити її параметри для конкретних компонентів системи;
- синтезувати систему керування з компенсатором перехресних зв’язків і регулятором за методом розміщення полюсів, дослідити стійкість за критерієм Рауса–Гурвіца та оцінити якість керування засобами MatLab;
- розробити проектну складову САК — обґрунтувати вибір технічних засобів автоматизації, розробити проектні рішення нижнього й верхнього рівнів та програмне забезпечення.

Об’єктом дослідження є процес калібрування інерціальних датчиків шляхом відтворення контрольованих рухів, а предметом — математична модель і система

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		15

автоматичного керування електромеханічним ХУ-столом, а також технічні засоби й алгоритми, що реалізують генерацію траєкторій і обробку сигналів ІМУ.

У першому розділі ХУ-стіл розглянуто як об'єкт автоматичного керування: проаналізовано призначення установки й суть процесу калібрування, охарактеризовано об'єкт вимірювання та обладнання, обґрунтовано параметри контролю й регулювання. У другому розділі побудовано й лінеаризовано математичну модель електромеханічної осі стола та визначено її характеристики — передавальні функції та модель у просторі станів. У третьому розділі обчислено параметри моделі, синтезовано систему керування методом розміщення полюсів, досліджено стійкість і якість керування засобами імітаційного моделювання. У четвертому розділі розроблено проектну складову системи: обґрунтовано вибір технічних засобів, спроектовано нижній і верхній рівні та програмне забезпечення комплексу.

Робота поєднує теоретичну складову (математичне моделювання та синтез регуляторів) із практичною реалізацією на реальних апаратних і програмних засобах, що відповідає завданню кваліфікаційної роботи. Теоретичні результати ґрунтуються на класичних методах теорії автоматичного керування, а практична частина — на сучасних рішеннях вбудованих систем і вебтехнологій.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						16
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

1 АНАЛІЗ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ КАЛІБРУВАННЯ ІМУ НА ХУ-СТОЛІ ЯК ОБ'ЄКТА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1 Призначення установки та суть процесу

Двокоординатний ХУ-стіл призначений для автоматизованого переміщення інерціального вимірювального модуля по заданих траєкторіях з метою тестування та калібрування гіроскопів і акселерометрів. Технологічний процес калібрування полягає у відтворенні відомих, контрольованих рухів датчика з одночасним записом його показів і подальшим порівнянням виміряних величин з еталонними, заданими програмою руху.

Суть процесу така. На рухомій каретці стола закріплюється ІМУ. Система керування за заданою програмою переміщує каретку у площині ХУ, відтворюючи еталонну траєкторію з контрольованими швидкістю та прискоренням. Під час руху модуль безперервно зчитує покази акселерометра, за якими відновлюється фактично пройдена траєкторія. Зіставлення заданої та відновленої траєкторій дозволяє оцінити систематичні похибки датчика й перевірити його динамічні характеристики. Для статичних режимів стіл забезпечує точне позиціонування каретки у заданих точках, що використовується для оцінювання зміщення нуля та масштабного коефіцієнта в полі сили тяжіння.

Місце акселерометра в інерціальній навігації пояснює важливість його калібрування. В інерціальній навігаційній системі положення й швидкість об'єкта обчислюються інтегруванням показів акселерометра, а орієнтація — інтегруванням показів гіроскопа. Оскільки положення отримується подвійним інтегруванням прискорення, будь-яка систематична похибка акселерометра швидко накопичується й спричиняє зростання похибки визначення координат із часом. Тому точність первинного калібрування акселерометра безпосередньо визначає тривалість автономної роботи INS із прийнятною точністю. Запропонований стенд дозволяє не лише визначити параметри калібрування, а й

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		17

експериментально оцінити темп накопичення похибки під час руху за різними траєкторіями.

Акселерометр як первинний перетворювач вимірює уявне (питоме) прискорення — різницю між істинним прискоренням тіла та прискоренням вільного падіння. Сигнал реального датчика відрізняється від ідеального через систематичні похибки (зміщення нуля, похибка масштабного коефіцієнта, перекіс і неортогональність осей, нелінійність) та випадкові похибки (шум, нестабільність зміщення нуля). Систематичні похибки підлягають визначенню й компенсації, що і є метою калібрування, тоді як випадкові обмежують досяжну точність. Зв'язок між істинним вектором прискорення та вихідним вектором акселерометра описують лінійною моделлю вимірювання:

$$a_{\text{вим}} = M \cdot a_{\text{іст}} + b + \varepsilon, \quad (1.1)$$

де $a_{\text{вим}}$ — виміряний вектор прискорення (3×1); $a_{\text{іст}}$ — істинний вектор; M — матриця 3×3 масштабних коефіцієнтів (діагональ) і коефіцієнтів перекосу (позадіагональні елементи); b — вектор зміщення нуля; ε — вектор випадкового шуму. Задача калібрування полягає у визначенні параметрів матриці M та вектора b за набором вимірювань у відомих умовах руху, які й відтворює ХУ-стіл.

Розглянемо складові похибок докладніше. Зміщення нуля (bias) — це систематичний ненульовий вихідний сигнал акселерометра за відсутності прискорення; воно складається з постійної складової, що визначається при виготовленні, складової, яка змінюється від увімкнення до увімкнення (turn-on bias), і повільного дрейфу під час роботи (in-run bias instability). Похибка масштабного коефіцієнта характеризує відхилення фактичного коефіцієнта перетворення «прискорення → вихідний код» від номінального й проявляється як пропорційне спотворення амплітуди сигналу. Перекіс і неортогональність осей зумовлені тим, що фактичні осі чутливості чутливих елементів не збігаються з ідеальними ортогональними осями корпусу; внаслідок цього прискорення, прикладене вздовж однієї осі, частково проєктується на дві інші, що описується позадіагональними елементами матриці M . Нелінійність характеристики

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		18

проявляється як залежність масштабного коефіцієнта від величини прискорення в межах діапазону вимірювання.

Випадкові похибки представлені насамперед широкосмуговим шумом, який під час інтегрування накопичується за законом випадкового блукання швидкості (velocity random walk), та нестабільністю зміщення нуля. На відміну від систематичних, випадкові похибки не усуваються калібруванням і визначають нижню межу досяжної точності. Саме тому важливо коректно відокремити систематичні складові, які можна компенсувати, від випадкових, які можна лише статистично охарактеризувати. Відтворення відомих рухів на ХУ-столі дозволяє накопичити достатній обсяг даних для такого відокремлення.

Точність відновлення положення за показами акселерометра принципово обмежена явищем подвійного інтегрування: похибка зміщення нуля Δa після інтегрування дає лінійно зростаючу похибку швидкості $\Delta v = \Delta a \cdot t$, а після другого інтегрування — квадратично зростаючу похибку положення $\Delta x = \Delta a \cdot t^2/2$. Через це навіть мале зміщення за секунди руху призводить до значного дрейфу, що унеможливорює пряме інтегрування й вимагає застосування додаткових методів корекції (розглянутих у розділі 4). ХУ-стіл, що задає еталонну траєкторію з відомими параметрами, дає можливість кількісно оцінити цей дрейф і перевірити ефективність алгоритмів його компенсації.

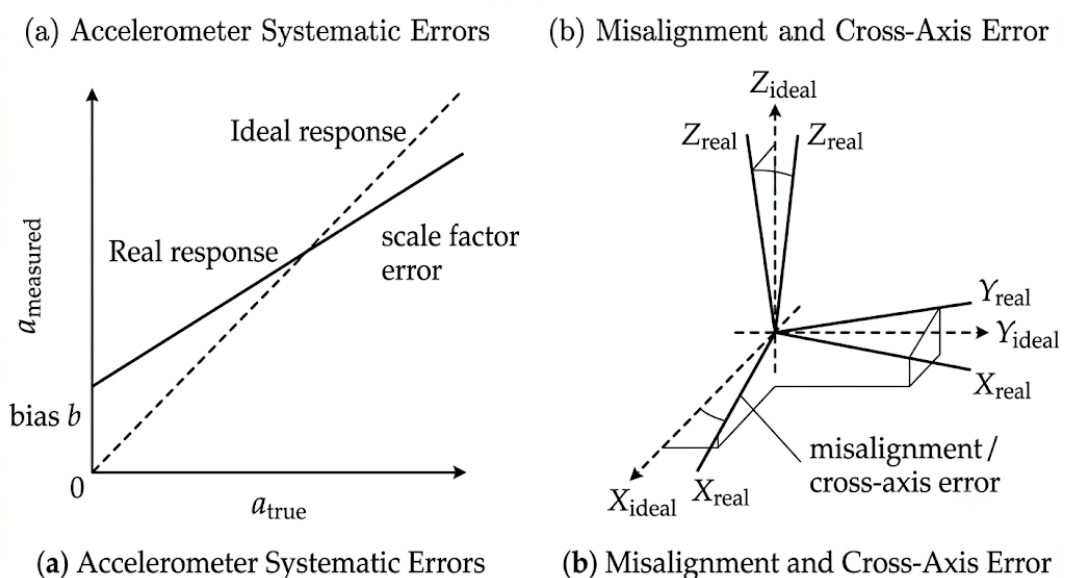


Рисунок 1.1 — Систематичні похибки акселерометра

DIY CNC XY-STAGE PLOTTER
(500x500mm)

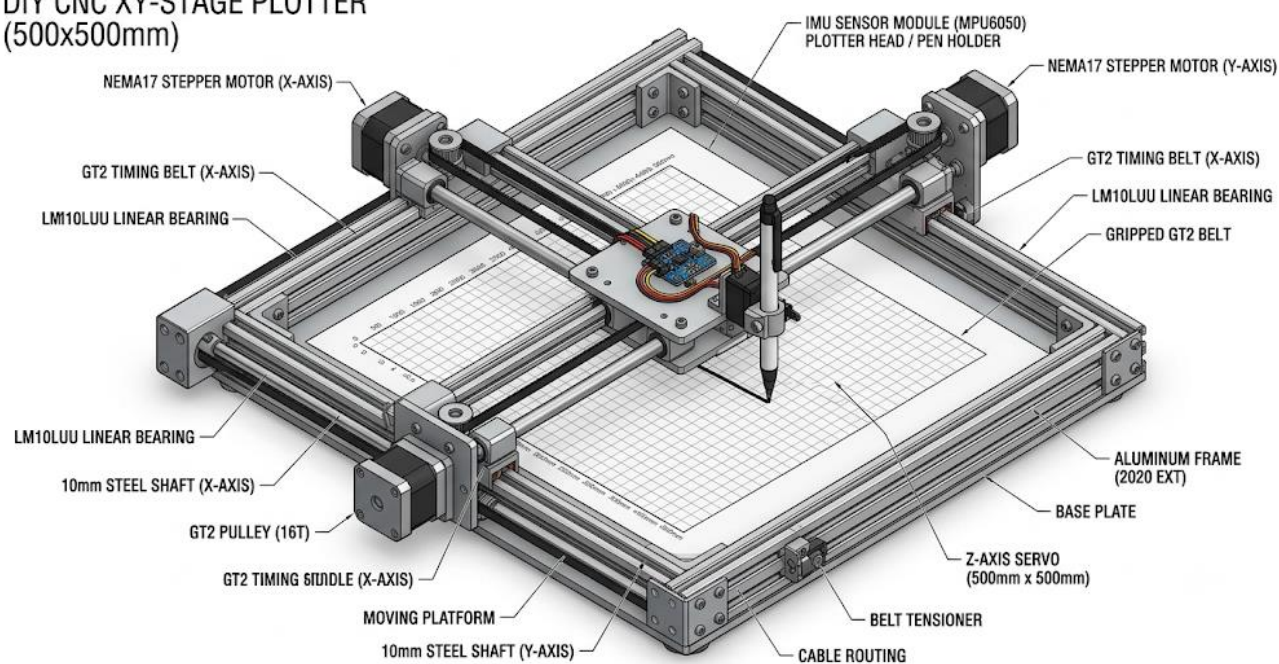


Рисунок 1.2 — 3D-модель конструкції XY-стола

Узагальнену послідовність технологічного процесу калібрування, що реалізується на стенді, наведено на рисунку 1.2 у вигляді блок-схеми. Вона відображає основні етапи — від базування осей до збереження результатів — і слугує орієнтиром для опису роботи апаратно-програмного комплексу в розділі 4.



Рисунок 1.3 — Блок-схема технологічного процесу калібрування

1.2 Характеристика продукції, сировини та реагентів

Оскільки ХУ-стіл є не виробничою установкою, а вимірювально-калібрувальним стендом, у цьому підрозділі під «продукцією» розуміється результат технологічного процесу, а саме набір калібрувальних даних і параметрів моделі датчика, а під «сировиною» — вхідні об'єкти процесу. Відповідність загальних понять методики специфіці стенда наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 — Відповідність понять технологічного процесу калібрування

Загальне поняття	Зміст у процесі калібрування ІМУ
Об'єкт обробки («сировина»)	інерціальний вимірювальний модуль MPU6050, що калібрується
Технологічна дія	відтворення еталонної траєкторії руху каретки з ІМУ
Вимірювана величина	питоме прискорення за трьома осями та кватерніон орієнтації
Результат («продукція»)	параметри моделі датчика (матриця M , вектор b) та оцінка похибок
Допоміжні засоби	електрична енергія 12 В; керуючий комп'ютер; ПЗ

Інерціальний модуль MPU6050 є шестиосьовим датчиком, що поєднує тривісний акселерометр і тривісний гіроскоп. Акселерометр має програмовані діапазони вимірювання $\pm 2/4/8/16$ g, 16-розрядні аналого-цифрові перетворювачі на кожную вісь і вбудований цифровий процесор руху (DMP), здатний апаратно обчислювати орієнтацію у вигляді кватерніона. Обмін із модулем здійснюється шиною I²C. Основні характеристики об'єкта вимірювання наведено в таблиці 1.2.

Для проведення калібрування застосовують два класи умов. Перший — статичні орієнтації датчика в полі сили тяжіння: за відсутності руху модуль вимірює вектор прискорення, має дорівнювати прискоренню вільного падіння g незалежно від орієнтації, що дає систему рівнянь-обмежень для визначення параметрів моделі (1.1) методом найменших квадратів. Цей підхід (зокрема шестипозиційний метод) дешевий і поширений, але не дозволяє перевірити

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		21

поведінку датчика під час руху. Другий клас умов — динамічні рухи з відомими траєкторіями та прискореннями; саме він вимагає програмованого механічного засобу й реалізується за допомогою ХУ-стола. Поєднання обох класів умов на одному стенді є перевагою запропонованого рішення.

Розкриємо принцип статичного калібрування. У нерухомому стані істинне прискорення дорівнює реакції опори, що зрівноважує силу тяжіння, тому для будь-якої орієнтації виконується умова $|M^{-1} \cdot (a_{\text{вим}} - b)| = g$. Записавши цю умову для кількох (не менше шести) різних орієнтацій датчика, отримують перевизначену систему рівнянь відносно невідомих елементів матриці M та вектора b , яку розв'язують методом найменших квадратів. Шість позицій відповідають орієнтаціям, коли кожна з трьох осей по черзі спрямована вертикально вгору та вниз; цього достатньо для оцінювання масштабних коефіцієнтів і зміщень за всіма осями, а додаткові проміжні орієнтації покращують оцінку коефіцієнтів перекосу. Хоча ХУ-стіл переміщує датчик у горизонтальній площині, його можна доповнити поворотним пристосуванням для виставлення потрібних статичних орієнтацій, а основну цінність стола становить саме відтворення динамічних траєкторій.

Таблиця 1.2 — Основні характеристики інерціального модуля MPU6050

Параметр	Значення
Діапазон акселерометра	$\pm 2 / \pm 4 / \pm 8 / \pm 16 \text{ g}$
Розрядність АЦП	16 біт на вісь
Діапазон гіроскопа	$\pm 250 / \pm 500 / \pm 1000 / \pm 2000 \text{ }^\circ/\text{с}$
Інтерфейс зв'язку	I ² C (до 400 кГц)
Напруга живлення	3,3 В
Вбудований процесор	DMP (обчислення кватерніона орієнтації)

1.3 Аналіз технологічної схеми установки ХУ-стола

Конструктивно стіл складається з двох ортогональних лінійних осей, кожна з яких включає: лінійну направляючу (вал Ø10 мм завдовжки 500 мм), каретку на

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		22

лінійних підшипниках LM10LUU, кроковий двигун NEMA17, зубчастий ремінь GT2 і натяжний ролик. Вісь Y встановлена на каретці осі X, що забезпечує переміщення IMU у площині. Робоче поле переміщення становить 500×500 мм, розмір робочого столу — 100×100 мм.

Кінематично рух передається від вала крокового двигуна через зубчастий шків GT2 на замкнений ремінь, який переміщує каретку вздовж направляючих. Кожному кроку (мікрокроку) двигуна відповідає визначене лінійне переміщення, що задається кроком ремня та кількістю зубів шківів. Така схема забезпечує прямий зв'язок між кількістю поданих імпульсів і положенням каретки й не потребує окремого давача положення для розімкненого позиціонування. Структуру технологічної установки як об'єкта керування з двома входами (напруги осей) та двома виходами (координати каретки) наведено на рисунку 1.3.

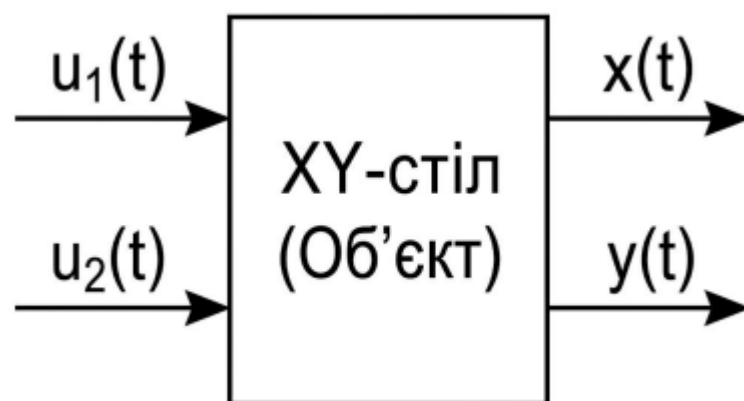


Рисунок 1.4 — Структурна схема об'єкта керування XY-стола

Система керування побудована за трирівневою схемою. Нижній рівень — драйвери DRV8825 і крокові двигуни NEMA17, що безпосередньо переміщують каретки. Середній рівень — мікроконтролер ESP32, який інтерпретує команди руху (G-code) і формує крокові імпульси, а також окремий мікроконтролер ESP32, що зчитує покази IMU. Верхній рівень — серверний застосунок на персональному комп'ютері, що реалізує бізнес-логіку, обробку траєкторій і сигналів та інтерфейс оператора. Зв'язок мікроконтролерів із комп'ютером здійснюється по USB (віртуальні послідовні порти). Узагальнену структурну схему системи керування наведено на рисунку 1.4.

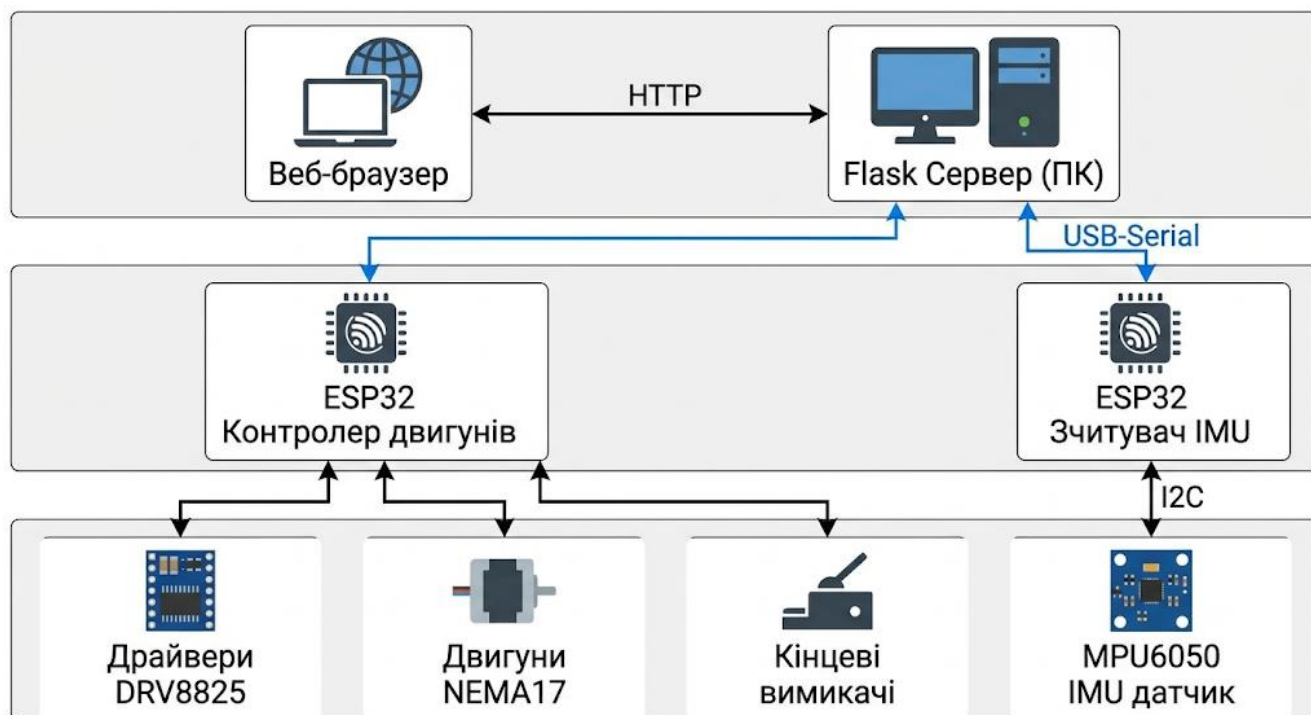


Рисунок 1.5 — Структурна схема системи керування XY-стола

Принциповим рішенням є рознесення керування кроковими двигунами та зчитування датчика на два окремі мікроконтролери. Контролер двигунів зайнятий високопріоритетними задачами формування крокових імпульсів із точним таймінгом, тоді як модуль IMU має безперервно зчитувати дані з частотою десятки–сотні герц. Поєднання цих задач на одному мікроконтролері призводить або до нерівномірності руху двигунів, або до пропусків у потоці даних датчика; рознесення усуває їх взаємний вплив.

Послідовність технологічного процесу калібрування на стенді складається з таких етапів. На підготовчому етапі виконується базування осей — каретки переміщуються до кінцевих вимикачів для встановлення нуля координат, після чого система знає абсолютне положення. На етапі калібрування датчика модуль IMU виконує початкове визначення зміщення нуля у статичному положенні. На основному етапі оператор задає еталонну траєкторію, сервер перетворює її на послідовність команд руху, а контролер відпрацьовує траєкторію; синхронно з рухом модуль IMU записує покази акселерометра. На завершальному етапі за записаними показами відновлюється фактично пройдена траєкторія, яка

зіставляється із заданою, і обчислюються показники похибки. Зібрані дані зберігаються у сесію для подальшого аналізу.

Інформаційні потоки в системі організовано так. Команди руху й налаштування передаються від сервера до контролера двигунів; у зворотному напрямку надходять звіти про стан і поточне положення. Команди керування збором даних передаються від сервера до модуля IMU; у зворотному напрямку — статуси й відновлена траєкторія. Веб-інтерфейс обмінюється із сервером запитами REST і отримує дані для відображення графіків і стану. Така організація забезпечує модульність системи: кожен компонент має чітко визначений інтерфейс, що спрощує налагодження й подальший розвиток.

1.4 Технічна характеристика технологічного обладнання

Перелік основних компонентів XY-стола та їх характеристики наведено в таблиці 1.3. Усі компоненти є серійними й широкодоступними, що відповідає принципу побудови стенда на доступній елементній базі.

Таблиця 1.3 — Перелік основних компонентів XY-стола

Компонент	Тип / параметр	Кільк.
Лінійна направляюча	вал Ø10 мм, 500 мм	6
Лінійний підшипник	LM10LUU	4
Кінцевий вимикач	мікроперемикач SS-5GL	2
Шків	GT2, 20 зубів, Ø5 мм	2
Кроковий двигун	NEMA17 (17HS4401)	2
Драйвер крокового двигуна	DRV8825	2
Ремінь	GT2, 6 мм	10 м
Натяжний ролик	GT2, Z20, D5	8
Мікроконтролер	ESP32 (контролер + зчитувач)	2
Інерціальний модуль	MPU6050	1
Блок живлення	12 В, 5 А	1

Кроковий двигун NEMA17 (17HS4401) є двофазним гібридним двигуном з кутом кроку $1,8^\circ$ (200 кроків на оберт). У режимі мікрокрокування драйвер

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						25
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

DRV8825 забезпечує плавніший рух і зменшення вібрацій; за обраного дроблення кроку та параметрів ремінної передачі коефіцієнт перетворення становить 80 кроків на міліметр переміщення. Драйвер DRV8825 дозволяє задавати струм обмоток і мікрокроковий режим, а також приймає сигнали напрямку та крокових імпульсів від мікроконтролера. Технічні характеристики двигуна детально розглянуто в розділі 4 (таблиця параметрів математичної моделі).

Лінійні направляючі виконано на сталевих валах діаметром 10 мм завдовжки 500 мм, по яких рухаються каретки на лінійних кулькових підшипниках LM10LUU. Такий вузол забезпечує низьке тертя й достатню жорсткість при помірній вартості. Передача руху здійснюється зубчастим ременем GT2 (крок зубів 2 мм) у парі зі шківом на 20 зубів; зубчастий профіль виключає прослизання, на відміну від фрикційної передачі. Натяг ременя регулюється натяжними роликами, що усуває провисання й зменшує люфт. Живлення приводу забезпечує блок 12 В, 5 А, потужності якого достатньо для одночасної роботи обох двигунів у динамічних режимах. Драйвери DRV8825 встановлюються на платі-носії з радіаторами для відведення тепла, оскільки при робочих струмах вони помітно нагріваються.

Вибір саме крокових двигунів (а не двигунів постійного струму з енкодерами чи сервоприводів) для цього стенда обґрунтований так: крокові двигуни забезпечують точне дискретне позиціонування без давача зворотного зв'язку, мають високий утримуючий момент на низьких швидкостях, прості в керуванні та недорогі. Їх основний недолік — можливість пропуску кроків при перевантаженні — несуттєвий за помірних швидкостей і прискорень, характерних для калібрувальних рухів, і за потреби усувається додаванням енкодерів[9].

1.5 Вибір та обґрунтування параметрів контролю і регулювання

Метою керування є забезпечення точного позиціонування каретки ХУ-стола за координатами $x(t)$ та $y(t)$ відповідно до заданої траєкторії. Виходячи з цього, основними регульованими величинами є лінійні переміщення кареток вздовж

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		26

осей X та Y, а керуючими впливами — напруги (усереднені ШІМ-сигнали) $u_1(t)$ та $u_2(t)$, що подаються на драйвери крокових двигунів осей X та Y відповідно. Допоміжними контрольованими величинами є кутова швидкість роторів двигунів (через неї визначається лінійна швидкість каретки) і покази ІМУ під час руху.

Перелік параметрів контролю та регулювання наведено в таблиці 1.4. Вибір саме цих параметрів зумовлений структурою об'єкта (два незалежні, але слабо зв'язані контури положення) та задачею відтворення еталонних траєкторій з контрольованими кінематичними параметрами.

Таблиця 1.4 — Параметри контролю і регулювання

Параметр	Позначення	Тип	Діапазон
Положення каретки X	x	регульований	0...500 мм
Положення каретки Y	y	регульований	0...500 мм
Напруга драйвера осі X	u_1	керуючий	ШІМ 0...100 %
Напруга драйвера осі Y	u_2	керуючий	ШІМ 0...100 %
Швидкість руху	v	контрольований	0...200 мм/с
Прискорення	a	контрольований	до 2000 мм/с ²
Покази акселерометра	a_x, a_y, a_z	контрольований	$\pm 2...16$ g

Вимоги до якості керування: точність позиціонування не гірша за $\pm 0,5$ мм у робочому діапазоні швидкостей, перерегулювання не більше 10 %, відсутність статичної похибки за положенням. Ці вимоги є вихідними для синтезу системи керування в розділі 3.

Обґрунтуємо вибір параметрів. Лінійні переміщення кареток обрано регульованими величинами, оскільки саме точність позиціонування каретки визначає, наскільки точно відтворюється задана траєкторія, а отже — якість калібрування. Керуючими впливами обрано напруги (усереднені ШІМ-сигнали) драйверів, бо саме вони безпосередньо впливають на струм обмоток і момент двигуна, через який реалізується рух; у моделі (розділ 2) напруга є природним входом електромеханічної системи. Кутова швидкість роторів є проміжною змінною стану, через яку визначається лінійна швидкість каретки, тому її віднесено до контрольованих величин. Швидкість і прискорення руху контролюються для забезпечення відомих кінематичних параметрів еталонної

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						27
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

траєкторії, що необхідно для калібрування динамічних характеристик датчика. Покази акселерометра контролюються як основний вихідний продукт процесу.

Структура об'єкта як системи з двома входами й двома виходами визначає й структуру системи керування — два контури регулювання положення (за осями X та Y) із можливою компенсацією перехресного зв'язку між ними. Оскільки осі конструктивно однакові, обидва контури мають однотипну структуру й відрізняються лише числовими значеннями параметрів, що спрощує синтез і налаштування.

Висновки до розділу

Проаналізовано двокоординатний XY -стіл як об'єкт автоматичного керування. Визначено призначення установки — автоматизоване переміщення ІМУ по заданих траєкторіях для тестування й калібрування інерціальних датчиків — та розкрито суть технологічного процесу калібрування, що полягає у відтворенні відомих рухів з одночасним записом показів датчика. Сформульовано лінійну модель вимірювання акселерометра й визначено параметри, які потрібно оцінити під час калібрування.

Розглянуто конструкцію та технологічну схему стола (дві ортогональні осі з кроковими двигунами NEMA17, драйверами DRV8825, ремінною передачею GT2 та USB-зв'язком із комп'ютером), наведено перелік і технічні характеристики обладнання. Обґрунтовано вибір параметрів контролю та регулювання: регульованими величинами є координати кареток x та y , керуючими — напруги драйверів осей, що визначає структуру об'єкта як системи з двома входами й двома виходами.

Окремо обґрунтовано трирівневу архітектуру системи керування та рознесення задач керування двигунами й зчитування датчика між двома мікроконтролерами, що усуває їх взаємний вплив і забезпечує як рівномірність руху, так і неперервність потоку даних ІМУ.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арх.
Змн.	Арх.	№ докум.	Підпис	Дата		28

2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ

2.1 Обґрунтування вибору об'єкта автоматизації

Об'єктом автоматизації обрано електромеханічну систему переміщення каретки ХУ-стола вздовж однієї координатної осі, а в загальному випадку — двовимірний об'єкт з двома входами та двома виходами. Вибір саме електромеханічної осі як об'єкта моделювання зумовлений тим, що саме динаміка приводу «кроковий двигун — ремінна передача — каретка» визначає точність і швидкодію відтворення еталонних траєкторій, а отже — якість калібрування. Оскільки осі X та Y конструктивно однакові, доцільно спочатку побудувати модель однієї осі, а потім поширити її на двовимірний об'єкт з урахуванням перехресного зв'язку.

Метою керування є забезпечення точного позиціонування каретки ХУ-стола за координатами $x(t)$ та $y(t)$ відповідно до заданої траєкторії. Керуючими впливами є напруги (ШІМ-сигнали) $u_1(t)$ та $u_2(t)$, що подаються на драйвери крокових двигунів осей X та Y відповідно. Вихідними величинами системи є лінійні переміщення $x(t)$ та $y(t)$ кареток. Таким чином, маємо двовимірний об'єкт керування з двома входами та двома виходами.

Хоча у кроковому режимі двигун керується послідовністю імпульсів, для аналізу динаміки відпрацювання траєкторії його зручно описувати неперервною моделлю електродвигуна, де входом є усереднена напруга обмотки, формована широтно-імпульсною модуляцією драйвера, а виходом — лінійне переміщення каретки. Такий підхід є стандартним для синтезу систем керування електроприводами й дозволяє застосувати апарат передавальних функцій і простору станів.

При побудові моделі прийнято такі припущення. Магнітне коло двигуна вважається лінійним (нехтуємо насиченням і гістерезисом), а індуктивність обмотки — сталою, незалежною від положення ротора; для усередненого опису у

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		29

смузі робочих частот це припущення є прийнятним. Ремінна передача вважається жорсткою (нехтуємо пружністю ремня та люфтом), що справедливо для коротких відрізків і помірних швидкостей; за потреби пружність ремня можна врахувати додатковою коливальною ланкою. Тертя описується сумою в'язкої та сухої складових; сухе тертя є нелінійним і враховується при моделюванні, але лінеаризується при синтезі. Маса досліджуваного ІМУ вважається відомою й сталою в межах одного експерименту. Прийняті припущення забезпечують компроміс між адекватністю моделі та її придатністю для аналітичного синтезу регулятора[3].

2.1.1 Динаміка крокового двигуна

Кроковий двигун NEMA17 (17HS4401) є двофазним гібридним двигуном з кутом кроку $1,8^\circ$ (200 кроків на оберт). У режимі мікрокрокування драйвер забезпечує до кількох тисяч мікрокроків на оберт. Рівняння електричної частини однієї фази крокового двигуна за другим законом Кірхгофа має вигляд:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot di(t)/dt + e(t), \quad (2.1)$$

де $u(t)$ — напруга живлення фази, В; R — активний опір обмотки, Ом; L — індуктивність обмотки, Гн; $i(t)$ — струм фази, А; $e(t)$ — електрорушійна сила (ЕРС) обертання, В.

ЕРС обертання пропорційна кутовій швидкості ротора:

$$e(t) = K_e \cdot \omega(t), \quad (2.2)$$

де K_e — коефіцієнт ЕРС, В·с/рад; $\omega(t)$ — кутова швидкість ротора, рад/с.

Електромагнітний момент двигуна пропорційний струму фази:

$$M_e(t) = K_m \cdot i(t), \quad (2.3)$$

де K_m — коефіцієнт моменту, Н·м/А. Для двигуна 17HS4401 коефіцієнти моменту та ЕРС у системі СІ чисельно збігаються: $K_m = K_e = 0,235$.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						30
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

2.1.2 Рівняння механічної частини

Рівняння обертального руху ротора двигуна за другим законом Ньютона для обертального руху:

$$J \cdot d\omega(t)/dt = M_e(t) - M_n(t) - M_T(t), \quad (2.4)$$

де J — сумарний момент інерції (ротор + шків + зведене навантаження), $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; $M_n(t)$ — момент навантаження, зведений до вала двигуна, $\text{Н} \cdot \text{м}$; $M_T(t)$ — момент тертя, $\text{Н} \cdot \text{м}$.

Зв'язок між кутовою швидкістю ротора та лінійною швидкістю каретки через ремінну передачу GT2:

$$v(t) = \omega(t) \cdot r, \quad r = p \cdot z / (2\pi), \quad (2.5)$$

де r — радіус ділильного кола шківа, м ; $p = 2 \text{ мм}$ — крок ременя GT2; $z = 20$ — кількість зубів шківа. Підставляючи значення, $r = 2 \cdot 20 / (2\pi) = 6,366 \text{ мм} = 6,366 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Лінійне переміщення каретки визначається інтегруванням лінійної швидкості:

$$dx(t)/dt = v(t) = \omega(t) \cdot r. \quad (2.6)$$

2.1.3 Моменти опору

Момент тертя складається з в'язкої та сухої (кулонової) складових:

$$M_T(t) = b \cdot \omega(t) + M_c \cdot \text{sign}(\omega(t)), \quad (2.7)$$

де b — коефіцієнт в'язкого тертя, $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} / \text{рад}$; M_c — момент сухого (кулонового) тертя, $\text{Н} \cdot \text{м}$.

Момент навантаження, зведений до вала двигуна, визначається силою опору руху каретки через радіус шківа:

$$M_n(t) = F_n(t) \cdot r, \quad (2.8)$$

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						31
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

де $F_n(t)$ — сила опору руху каретки (тертя в лінійних підшипниках та направляючих), Н.

2.1.4 Повна математична модель однієї осі

Підставляючи (2.2) і (2.3) у (2.1) та (2.4), отримуємо систему диференціальних рівнянь для однієї осі (наприклад, осі X):

$$L \cdot di_1/dt = u_1 - R \cdot i_1 - K_e \cdot \omega_1, \quad (2.9)$$

$$J_1 \cdot d\omega_1/dt = K_m \cdot i_1 - b_1 \cdot \omega_1 - M_{cl} \cdot \text{sign}(\omega_1) - F_{n1} \cdot r_1, \quad (2.10)$$

$$dx/dt = \omega_1 \cdot r_1. \quad (2.11)$$

Аналогічна система рівнянь записується для осі Y з відповідними індексами. Рівняння (2.9)–(2.11) є нелінійними через член сухого тертя і повністю описують динаміку однієї осі від керуючої напруги до лінійного переміщення.

2.1.5 Двовимірна модель XY-стола

Оскільки вісь Y встановлена на каретці осі X, існує перехресний зв'язок: маса каретки Y разом з IMU є навантаженням для осі X, а прискорення осі X створює додаткову інерційну силу на осі Y. Повна модель об'єкта має такий вигляд.

Розглянемо природу перехресного зв'язку докладніше. Привод осі X переміщує не лише власну каретку, а й усю вісь Y (її двигун, направляючі та каретку з IMU), тому зведений до вала двигуна X момент інерції містить масу осі Y; це відображено в (2.13) доданком зі зведеною масою ($m_2 + m_{\text{IMU}}$). У зворотному напрямку прискорення осі X надає системі координат осі Y переносного прискорення, що в загальному випадку впливає на динаміку Y. Проте для розглянутої конструкції цей зворотний вплив є слабким: маса IMU мала, а прискорення помірні, тому переносні інерційні сили незначні порівняно з рушійним моментом. Це дозволяє при синтезі розглядати осі як два слабо зв'язані контури, увівши за потреби компенсацію (розділ 3).

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		32

Для осі X:

$$L_1 \cdot di_1/dt = u_1 - R_1 \cdot i_1 - K_{e1} \cdot \omega_1, \quad (2.12)$$

$$J_{1T} \cdot d\omega_1/dt = K_{m1} \cdot i_1 - b_1 \cdot \omega_1 - (m_2 + m_{IMU}) \cdot r_1^2 \cdot (d\omega_1/dt) - F_{T1} \cdot r_1. \quad (2.13)$$

Для осі Y:

$$L_2 \cdot di_2/dt = u_2 - R_2 \cdot i_2 - K_{e2} \cdot \omega_2, \quad (2.14)$$

$$J_2 \cdot d\omega_2/dt = K_{m2} \cdot i_2 - b_2 \cdot \omega_2 - m_{IMU} \cdot r_2^2 \cdot (d\omega_2/dt) - F_{T2} \cdot r_2, \quad (2.15)$$

де m_2 — маса каретки осі Y, кг; m_{IMU} — маса IMU з контролером (до 0,5 кг); $J_{1T} = J_1 + (m_2 + m_{IMU}) \cdot r_1^2$ — повний момент інерції осі X з урахуванням зведеної маси. Рівняння (2.12)–(2.15) разом із кінематичними зв'язками $dx/dt = \omega_1 \cdot r_1$ та $dy/dt = \omega_2 \cdot r_2$ утворюють повну математичну модель XY-стола. Еквівалентну схему електромеханічної системи однієї осі наведено на рисунку 2.1.

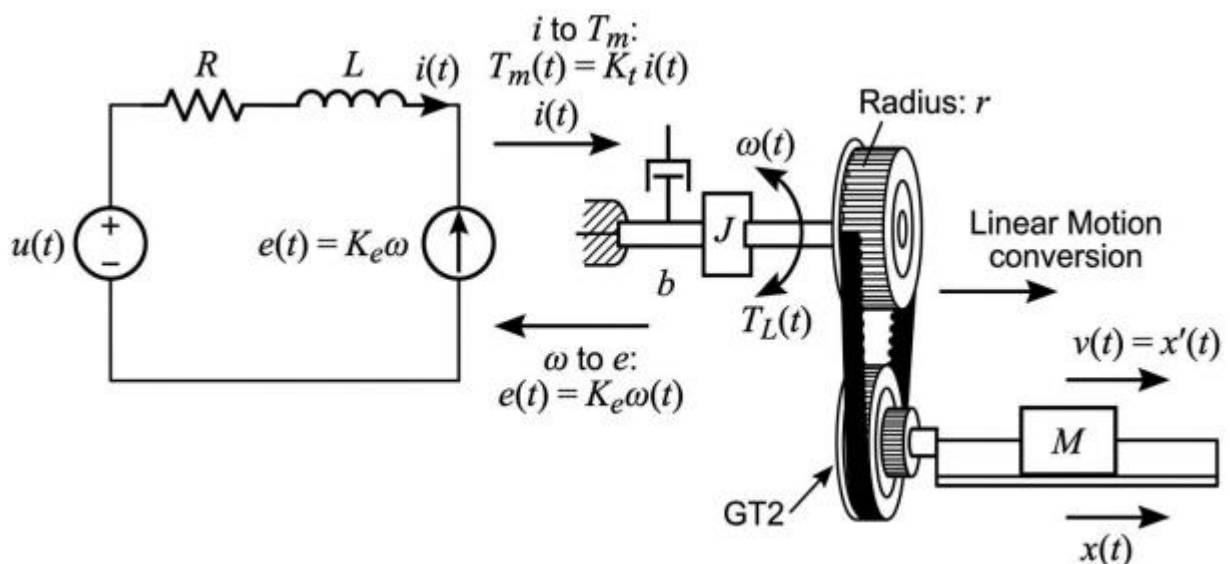


Рисунок 2.1 — Еквівалентна схема електромеханічної системи однієї осі

2.2 Визначення характеристик об'єкта автоматизації

Для синтезу лінійного регулятора нелінійну модель (2.12)–(2.15) лінеаризують в околі робочої точки, після чого визначають передавальні функції та матриці простору станів — характеристики об'єкта, потрібні для подальшого аналізу й синтезу.

2.2.1 Лінеаризація в околі робочої точки

Нехай робоча точка відповідає рівномірному руху з усталеною швидкістю v_0 . Подамо змінні як суму стаціонарних значень і малих відхилень:

$$i_1 = i_1^0 + \Delta i_1, \quad \omega_1 = \omega_1^0 + \Delta \omega_1, \quad u_1 = u_1^0 + \Delta u_1, \quad (2.16)$$

$$i_2 = i_2^0 + \Delta i_2, \quad \omega_2 = \omega_2^0 + \Delta \omega_2, \quad u_2 = u_2^0 + \Delta u_2. \quad (2.17)$$

Нелінійний член $M_c \cdot \text{sign}(\omega)$ в околі робочої точки з $\omega_0 > 0$ лінеаризується як константа M_c (для $\omega_0 = 0$ застосовується інший підхід). Після лінеаризації та переходу до відхилень від стаціонарного режиму система рівнянь для осі X набуває вигляду:

Лінеаризація ґрунтується на розкладі нелінійних функцій у ряд Тейлора в околі робочої точки зі збереженням лише лінійних членів. Для гладких членів моделі (добутки змінних, лінійні члени) це зводиться до обчислення часткових похідних у робочій точці; для члена сухого тертя зі знаковою функцією похідна за швидкістю в області $\omega_0 > 0$ дорівнює нулю, тому цей член входить у лінеаризовані рівняння як стала складова, що зміщує робочу точку, але не впливає на динаміку малих відхилень. Саме тому при $\omega_0 > 0$ сухе тертя не з'являється явно в рівняннях (3.3)–(3.4) для відхилень. Поблизу нульової швидкості ($\omega_0 = 0$) знакова функція має розрив, і лінеаризація у звичайному сенсі неможлива; у цьому разі застосовують інші підходи (наприклад, гармонічну лінеаризацію або згладжену апроксимацію сухого тертя), проте для режиму рівномірного руху, характерного для відпрацювання траєкторій, прийнята лінеаризація є коректною.

$$L_1 \cdot d(\Delta i_1)/dt = \Delta u_1 - R_1 \cdot \Delta i_1 - K_{e1} \cdot \Delta \omega_1, \quad (2.18)$$

$$J_{1T} \cdot d(\Delta \omega_1)/dt = K_{m1} \cdot \Delta i_1 - b_1 \cdot \Delta \omega_1. \quad (2.19)$$

Аналогічно для осі Y:

$$L_2 \cdot d(\Delta i_2)/dt = \Delta u_2 - R_2 \cdot \Delta i_2 - K_{e2} \cdot \Delta \omega_2, \quad (2.20)$$

$$J_2 \cdot d(\Delta \omega_2)/dt = K_{m2} \cdot \Delta i_2 - b_2 \cdot \Delta \omega_2. \quad (2.21)$$

2.2.2 Передавальні функції

Передавальну функцію об'єкта зручно отримати, застосувавши перетворення Лапласа до лінеаризованих рівнянь. Позначимо зображення відхилень за Лапласом великими літерами: $\Delta I(s)$, $\Delta \Omega(s)$, $\Delta U(s)$. Тоді рівняння (2.18) і (2.17) у зображеннях набувають вигляду:

$$(L \cdot s + R) \cdot \Delta I(s) = \Delta U(s) - K_e \cdot \Delta \Omega(s), \quad (2.22a)$$

$$(J_{IT} \cdot s + b) \cdot \Delta \Omega(s) = K_m \cdot \Delta I(s). \quad (2.22b)$$

Виразивши $\Delta I(s)$ з (3.76) і підставивши в (3.7a), після перетворень одержуємо передавальну функцію однієї осі від напруги до кутової швидкості:

$$W_\omega(s) = \Delta \omega(s) / \Delta U(s) = K_m / (L \cdot J_{IT} \cdot s^2 + (R \cdot J_{IT} + L \cdot b) \cdot s + (R \cdot b + K_e \cdot K_m)), \quad (2.23)$$

Або у стандартній формі через сталі часу й коефіцієнт підсилення:

$$W_\omega(s) = K_\omega / (T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1), \quad (2.24)$$

де $K_\omega = K_m / (R \cdot b + K_e \cdot K_m)$ — статичний коефіцієнт підсилення; $T_1 = L/R$ — електрична стала часу; $T_2 = J_{IT}/b$ — механічна стала часу.

Фізичний зміст сталих часу такий. Електрична стала часу $T_1 = L/R$ характеризує швидкодію електричного кола якоря — час, за який струм у обмотці досягає усталеного значення при стрибку напруги; для крокового двигуна вона мала (одиниці мілісекунд). Механічна стала часу $T_2 = J/b$ характеризує інерційність механічної частини — час розгону ротора з навантаженням до усталеної швидкості; вона на два порядки більша за електричну. Значна різниця сталих часу ($T_2 \gg T_1$) означає, що електричні перехідні процеси загасають набагато швидше за механічні, і динаміка об'єкта у смузі робочих частот визначається переважно механічною частиною. Це дозволяє за потреби спростувати модель, нехтуючи електричною сталою часу, проте у роботі збережено повну модель другого порядку для точності.

Передавальна функція від напруги до лінійного переміщення (з урахуванням ремінної передачі та інтегруючої ланки) має третій порядок:

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						35
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$W_x(s) = X(s)/U(s) = r \cdot K_\omega / (s \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1)) . \quad (2.25)$$

Наявність інтегруючої ланки $1/s$ у (3.9) означає, що об'єкт є астатичним за положенням: за сталого керуючого впливу каретка рухається з усталеною швидкістю, а положення необмежено зростає. Це визначає вибір структури регулятора в розділі 3.

2.2.3 Матрична модель у просторі станів

Введемо вектор стану для осі X: $x_1 = \Delta i_1$, $x_2 = \Delta \omega_1$, $x_3 = \Delta x$. Тоді систему рівнянь подамо у матричній формі:

$$dX/dt = A \cdot X + B \cdot U , \quad (2.26)$$

де для однієї осі матриці системи та входу мають вигляд:

$$A = [-R/L, -K_e/L, 0; K_m/J, -b/J, 0; 0, r, 0] , \quad B = [1/L; 0; 0] . \quad (2.27)$$

Для повної двовимірної системи XY вектор стану має розмірність 6 (по три змінні на кожну вісь), а матриці A та B — розмірності 6×6 і 6×2 відповідно. Враховуючи перехресний зв'язок (маса Y-каретки як навантаження X-осі), матриця A у загальному випадку не є строго блочно-діагональною:

$$dY_{full}/dt = A_{full} \cdot Y_{full} + B_{full} \cdot U_{vec} , \quad (2.28)$$

де $Y_{full} = [i_1, \omega_1, x, i_2, \omega_2, y]^T$ — вектор стану; $U_{vec} = [u_1, u_2]^T$ — вектор керування. Така форма зручна для аналізу керованості, спостережуваності та для синтезу регулятора у просторі станів[2].

Перевірка керованості та спостережуваності об'єкта є необхідною передумовою синтезу. Для однієї осі (система третього порядку) матриця керованості будується як $W_k = [B, A \cdot B, A^2 \cdot B]$, а матриця спостережуваності — як $W_c = [C; C \cdot A; C \cdot A^2]$. Об'єкт є повністю керованим, якщо ранг матриці керованості дорівнює порядку системи (трьом), і повністю спостережуваним, якщо ранг матриці спостережуваності також дорівнює трьом. Для розглянутої осі обидві умови виконуються: керуючий вплив (напруга) через ланцюг «струм → момент → швидкість → положення» впливає на всі змінні стану, а вихідна координата

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		36

положення однозначно пов'язана з рештою змінних через інтегральні співвідношення. Це гарантує можливість довільного розміщення полюсів замкненої системи й відновлення повного вектора стану за вимірюваним виходом, що й використано при синтезі в розділі 3.

Структурну схему об'єкта у просторі станів (для однієї осі) у вигляді з'єднання інтеграторів, підсилювачів і зворотних зв'язків наведено на рисунку 2.2. Така схема відображає внутрішню структуру моделі та зв'язки між змінними стану.

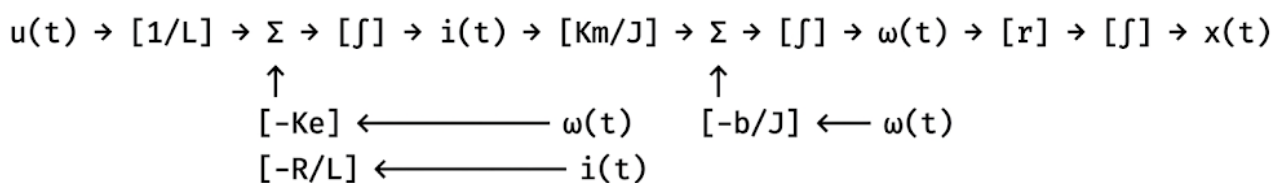


Рисунок 2.2 — Структурна схема об'єкта у просторі станів

Обґрунтовано вибір електромеханічної осі ХУ-стола як об'єкта автоматизації та побудовано її математичну модель, що враховує електричну (рівняння кола якоря, ЕРС, електромагнітний момент) і механічну (рівняння обертального руху, в'язке й сухе тертя, ремінна передача) динаміку крокового двигуна. Отримано повну нелінійну модель однієї осі (рівняння 2.9–2.11) та двовимірну модель ХУ-стола (рівняння 2.12–2.15) з урахуванням перехресного зв'язку між осями через зведену масу.

Висновки до розділу

Виконано лінеаризацію моделі в околі робочої точки рівномірного руху (рівняння 2.17–2.22) та визначено характеристики об'єкта: передавальну функцію від напруги до кутової швидкості (2.23, 2.24) і від напруги до переміщення (2.25), яка має третій порядок з інтегруючою ланкою, а також матричну модель у просторі станів (2.26–2.28). Астатичний характер об'єкта за положенням визначає вибір структури регулятора. Отримані характеристики є основою для синтезу системи автоматичного керування в розділі 3.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						37
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3 СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

3.1 Синтез одноконтурної системи автоматичного керування

Синтез системи керування ХУ-столом виконується у такій послідовності: обчислення числових значень параметрів моделі для конкретних компонентів; вибір структури регулятора виходячи з властивостей об'єкта; визначення параметрів налаштування регулятора методом розміщення полюсів. Оскільки осі однакові, синтез виконується для одного контуру (осі X), а потім аналогічно для осі Y.

Усі обчислення, синтез і моделювання виконано в середовищі MatLab із застосуванням пакета Control System Toolbox, що надає засоби для роботи з передавальними функціями (tf), моделями простору станів (ss), обчислення полюсів (pole), частотних характеристик (bode, margin, bandwidth), побудови перехідних характеристик (step) та моделювання реакції на довільний вхід (lsim). Вибір MatLab зумовлений зручністю символічно-числової роботи з лінійними системами, наявністю готових функцій аналізу та можливістю наочної візуалізації результатів. Організація програмного коду у вигляді послідовних і незалежних сценаріїв (скриптів) є класичним прикладом модульної архітектури в інженерних та наукових обчисленнях. Кожен етап розглядається як окремий ізольований блок, що має чітко визначені вхідні та вихідні дані. Це дозволяє уникнути створення громіздких монолітних програм і забезпечує гнучкість розробки. При такій структурі проміжні результати не втрачаються в оперативній пам'яті, а фіксуються на диску.

3.1.1 Обчислення параметрів математичної моделі

Технічні характеристики крокового двигуна 17HS4401 (NEMA17) наведено в таблиці 3.1.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						38
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Таблиця 3.1 — Параметри крокового двигуна NEMA17 (17HS4401)

Параметр	Позначення	Значення
Опір обмотки фази	R	1,5 Ом
Індуктивність обмотки фази	L	2,8 мГн
Номінальний струм фази	I _{ном}	1,7 А
Утримуючий момент	M _{утр}	0,4 Н·м
Момент інерції ротора	J _{рот}	54 г·см ²
Коефіцієнт моменту	K _m	0,235 Н·м/А
Коефіцієнт ЕРС	K _e	0,235 В·с/рад
Кут кроку	θ _{step}	1,8°
Маса двигуна	m _{дв}	0,28 кг

Радіус ділильного кола шківів GT2-20 обчислюється за формулою (2.5):

$$r = p \cdot z / (2\pi) = 0,002 \cdot 20 / (2 \cdot 3,14159) = 6,366 \cdot 10^{-3} \text{ м} . \quad (3.1)$$

Маса каретки осі Y разом з IMU становить $m_2 + m_{\text{IMU}} \approx 0,3 + 0,5 = 0,8$ кг. Зведений момент інерції для осі X (з урахуванням маси, що переміщується разом з кареткою X):

$$J_{1T} = J_{\text{рот}} + (m_2 + m_{\text{IMU}}) \cdot r^2 = 54 \cdot 10^{-7} + 0,8 \cdot (6,366 \cdot 10^{-3})^2 \approx 3,78 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 . \quad (3.2)$$

Для осі Y, що несе лише IMU:

$$J_2 = J_{\text{рот}} + m_{\text{IMU}} \cdot r^2 = 54 \cdot 10^{-7} + 0,5 \cdot (6,366 \cdot 10^{-3})^2 \approx 2,57 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 . \quad (3.3)$$

Коефіцієнт в'язкого тертя для лінійних підшипників на валах оцінюється як:

$$b_1 \approx b_2 \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад} \quad (3.4)$$

Звідси сталі часу та статичний коефіцієнт для осі X. Електрична стала часу $T_1 = L/R = 2,8 \cdot 10^{-3} / 1,5 = 1,867 \cdot 10^{-3}$ с; механічна стала часу $T_2 = J_{1T}/b_1 = 3,78 \cdot 10^{-5} / (1 \cdot 10^{-4}) = 0,378$ с. Статичний коефіцієнт підсилення:

$$K_{\omega} = K_m / (R \cdot b + K_e \cdot K_m) = 0,235 / (1,5 \cdot 10^{-4} + 0,235^2) = 0,235 / 0,05537 \approx 4,245 \text{ рад/(с} \cdot \text{В)} . \quad (3.5)$$

Обчислення параметрів, формування матриць простору станів і передавальних функцій виконано у середовищі MatLab. Нижче наведено фрагмент програми обчислення параметрів моделі.

```

% ПАРАМЕТРИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ХУ-СТОЛУ
R = 1.5; % Опір обмотки, Ом
L = 2.8e-3; % Індуктивність, Гн
Km = 0.235; % Коефіцієнт моменту, Н·м/А
Ke = 0.235; % Коефіцієнт ЕРС, В·с/рад
Jrot = 54e-7; % Момент інерції ротора, кг·м²
p_belt = 0.002; z_pulley = 20;
r = p_belt*z_pulley/(2*pi); % Радіус шківів
m_carriage_y = 0.3; m_imu = 0.5;
b1 = 1e-4; b2 = 1e-4; % В'язке тертя
J1t = Jrot + (m_carriage_y + m_imu)*r^2; % Вісь X
J2 = Jrot + m_imu*r^2; % Вісь Y
T1 = L/R; T2_x = J1t/b1; T2_y = J2/b2; % Сталі часу
K_omega_x = Km/(R*b1 + Ke*Km); % Статичний коеф.
% Матриці простору станів (вісь X)
Ax = [-R/L, -Ke/L, 0; Km/J1t, -b1/J1t, 0; 0, r, 0];
Bx = [1/L; 0; 0]; Cx = [0, 0, 1]; Dx = 0;
% Передавальна функція U -> x
num_x = r*Km; den_x = [L*T1, R*T1+L*b1, R*b1+Ke*Km, 0];
W_x = tf(num_x, den_x);

```

Результат виконання програми (значення сталих часу, коефіцієнтів, полюсів розімкненої системи та передавальних функцій) наведено на рисунку 3.1.

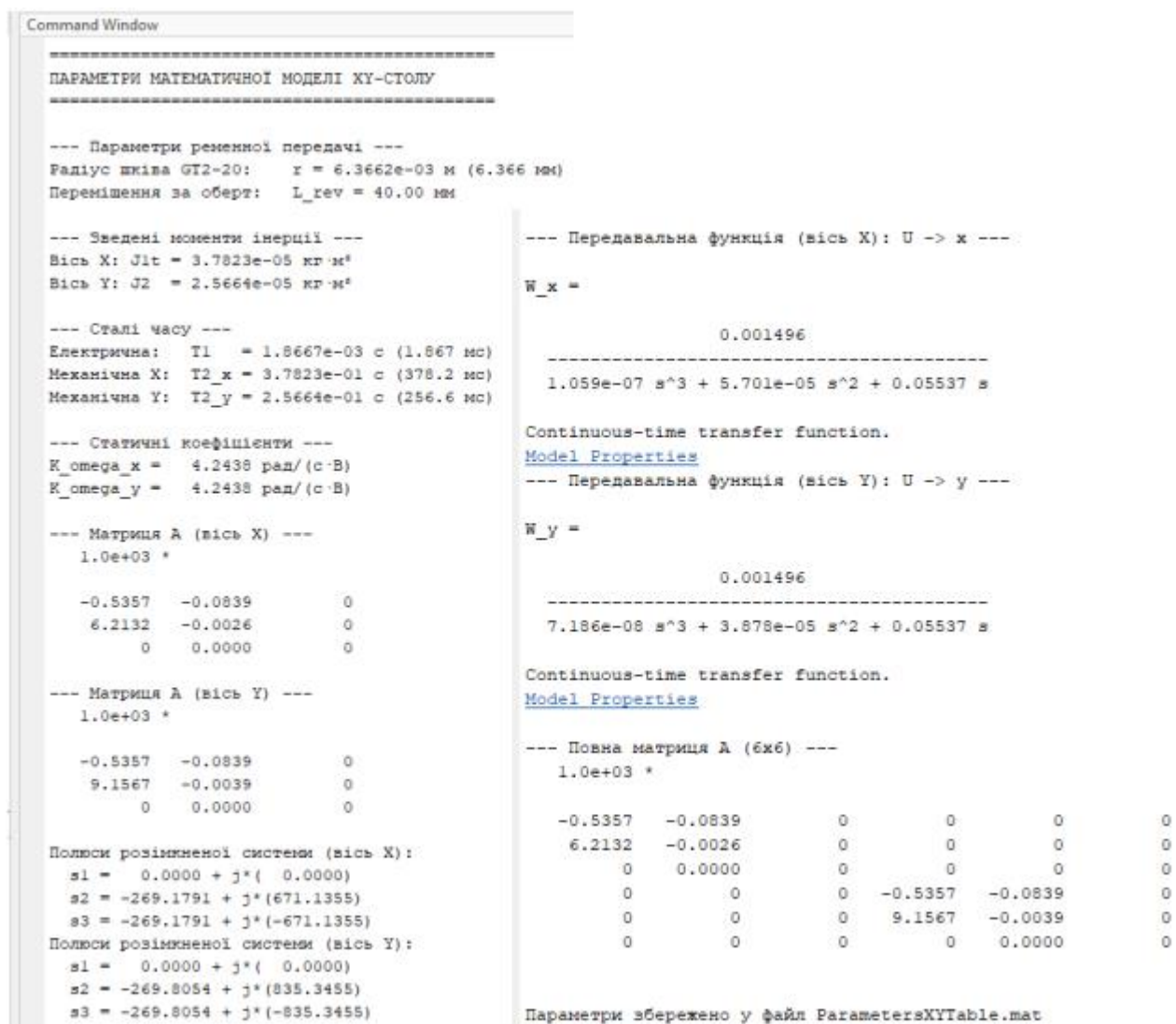


Рисунок 3.1 — Результати обчислення параметрів моделі ХУ-стола

3.1.2 Структура системи керування

За аналогією з автономною системою керування багатовимірним об'єктом, для ХУ-стола синтезуємо систему з компенсатором перехресних зв'язків та регуляторами в кожному контурі. Матрична передавальна функція об'єкта визначається через матриці простору станів:

$$W(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B. \quad (3.5)$$

Оскільки перехресний зв'язок між осями Х та Y є слабким (зумовлений лише інерцією зведеної маси), задачу можна спростити, розглядаючи систему як два незалежні контури з компенсацією зв'язку. Структуру системи керування з компенсатором наведено на рисунку 3.2.

Принцип роботи компенсатора такий. Матрична передавальна функція об'єкта $W(s)$ у загальному випадку містить позадіагональні елементи $W_{12}(s)$ та $W_{21}(s)$, що описують вплив керування однією віссю на рух іншої. Компенсатор формує додаткові керуючі впливи $W_{k12}(s)$ та $W_{k21}(s)$, які за ідеального налаштування дорівнюють $-W_{12}(s)/W_{11}(s)$ та $-W_{21}(s)/W_{22}(s)$ і компенсують перехресні складові, роблячи результуючу матричну передавальну функцію діагональною. Після компенсації кожен контур можна синтезувати незалежно як одновимірну систему, що суттєво спрощує задачу. У даному випадку, оскільки перехресний вплив малий, навіть неповна компенсація забезпечує

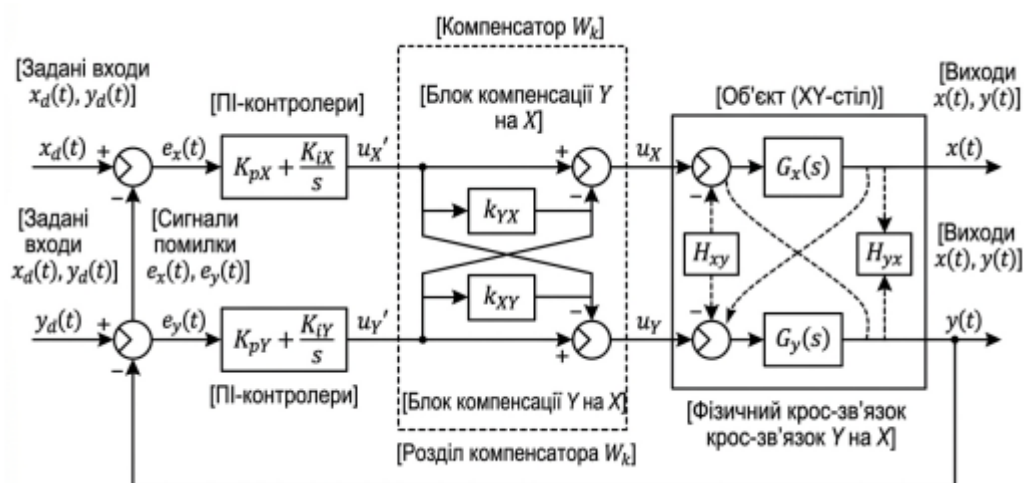


Рисунок 3.2 — Структурна схема системи керування з компенсатором

3.1.3 Регулятор контуру положення

Передавальна функція регулятора для i -го контуру у загальному випадку має пропорційно-інтегральну структуру:

$$W_{c,ii}(s) = (C_0^{(i)} + C_1^{(i)} \cdot s) / s, \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

Підставляючи $W_{11}(s)$ — передавальну функцію осі X від напруги до переміщення (3.9):

$$W_{11}(s) = r \cdot K_m / (s \cdot (L \cdot J_{1T} \cdot s^2 + (R \cdot J_{1T} + L \cdot b_1) \cdot s + (R \cdot b_1 + K_e \cdot K_m))) \quad (3.7)$$

Замкнена передавальна функція першого контуру:

$$W_1(s) = W_{11}(s) \cdot W_{c,11}(s) / (1 + W_{11}(s) \cdot W_{c,11}(s)) \quad (3.8)$$

Оскільки передавальна функція об'єкта $W_{11}(s)$ уже містить інтегруючу ланку, для усунення статичної похибки за положенням додаткова інтегральна складова регулятора не потрібна. Тому практично застосовується пропорційно-диференціальний регулятор $W_c(s) = K_p + K_d \cdot s$, що дає характеристичний поліном замкненої системи третього порядку з двома вільними параметрами (K_p , K_d):

$$L \cdot J \cdot s^3 + (R \cdot J + L \cdot b) \cdot s^2 + (R \cdot b + K_e \cdot K_m + r \cdot K_m \cdot K_d) \cdot s + r \cdot K_m \cdot K_p = 0. \quad (3.9)$$

3.1.4 Метод розміщення полюсів

Для вибору параметрів налаштування регулятора використовується метод розміщення полюсів на комплексній s -площині. Маючи поліном третього порядку (5.5) з двома параметрами, можна задати розташування двох із трьох коренів (домінуючу комплексно-спряжену пару), а третій корінь визначається автоматично з умови рівності коефіцієнта при s^2 . Алгоритм обчислення параметрів налаштування такий:

- записують характеристичний поліном замкненої системи у нормованому вигляді (коефіцієнт при старшому степені s^3 дорівнює одиниці);

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						42
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- задають бажані домінуючі полюси $s_{1,2} = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$ (через дійсну частину σ та частоту коливань ω_d), третій корінь $s_3 = -\sigma_3$ визначають з умови $2\sigma + \sigma_3 = p$, де p — фіксований коефіцієнт при s^2 ;
- будують бажаний характеристичний поліном за коренями та прирівнюють його коефіцієнти до коефіцієнтів полінома (3.5);
- з отриманих рівнянь знаходять коефіцієнти регулятора: $K_d = (d_1 \cdot a_2 - a_0)/(r \cdot K_m)$ та $K_p = d_0 \cdot a_2/(r \cdot K_m)$;
- перевіряють стійкість синтезованої системи за критерієм Рауса–Гурвіца.

Розкриємо побудову бажаного полінома. Нормований характеристичний поліном третього степеня з трьома заданими коренями s_1, s_2, s_3 має вигляд:

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + d_2 \cdot s^2 + d_1 \cdot s + d_0, \quad (3.10)$$

де для домінуючої пари $s_{1,2} = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$ та дійсного кореня $s_3 = -\sigma_3$ коефіцієнти дорівнюють $d_2 = 2\sigma + \sigma_3$, $d_1 = \sigma^2 + \omega_d^2 + 2\sigma \cdot \sigma_3$, $d_0 = (\sigma^2 + \omega_d^2) \cdot \sigma_3$. Прирівнюючи коефіцієнт d_2 до фіксованого нормованого коефіцієнта при s^2 об'єкта ($p = a_1/a_2$), знаходимо третій корінь $\sigma_3 = p - 2\sigma$. Решта два рівняння (для d_1 та d_0) дають коефіцієнти регулятора K_d та K_p .

Бажану дійсну частину домінуючих полюсів σ обирають з умов швидкодії (більше σ — швидший перехідний процес), а частоту ω_d — з умов допустимої коливності (відношення ω_d/σ визначає перерегулювання). Для забезпечення стійкості необхідно, щоб третій корінь був від'ємним ($\sigma_3 > 0$); якщо обране σ зavelike, σ_3 стає від'ємним, тому в програмі передбачено автоматичне коригування σ зі збереженням додатного σ_3 . Нижче наведено фрагмент програми синтезу регулятора методом розміщення полюсів у MatLab.

```
% СИНТЕЗ: ПД-регулятор положення (об'єкт має інтегратор)
% Характ. поліном: L*s^3 + (R*J+L*b)*s^2 +
% (R*b+Kе*Km + r*Km*Kd)*s + r*Km*Kp = 0
a2x = L*Jlt; alx = R*Jlt + L*b1; a0x = R*b1 + Ke*Km;
Kc_x = r*Km; % коеф. при параметрах регулятора
p_x = alx/a2x; % фіксований коеф. при s^2
sigma_x = 100; wd_x = 50; % бажані домінуючі полюси
sigma3_x = p_x - 2*sigma_x; % третій корінь
des_poles_x = [-sigma_x+1j*wd_x, -sigma_x-1j*wd_x, -sigma3_x];
des_poly_x = poly(des_poles_x);
d1_x = des_poly_x(3); d0_x = des_poly_x(4);
Kd_x = (d1_x*a2x - a0x) / Kc_x; % коефіцієнт Kd
Kp_x = d0_x*a2x / Kc_x; % коефіцієнт Kp
% Замкнена система
Wc_x = tf([Kd_x, Kp_x], 1);
W_cl_x = feedback(W_x_full * Wc_x, 1);
```

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арх.
Змн.	Арх.	№ докум.	Підпис	Дата		43

Результат синтезу (обчислені коефіцієнти регуляторів K_p , K_d обох осей, полюси замкненої системи, перевірка статичного коефіцієнта DC gain та результати критерію Рауса–Гурвіца) наведено на рисунку 3.3.

```

=====
СИНТЕЗ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ХУ-СТОЛОМ (v4)
=====
W(s) вісь X (U -> x):

W_x_full =

          0.001496
-----
1.059e-07 s^3 + 5.701e-05 s^2 + 0.05537 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
W(s) вісь Y (U -> y):

W_y_full =

          0.001496
-----
7.186e-08 s^3 + 3.878e-05 s^2 + 0.05537 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
=====
ПІДХІД: ПД-РЕГУЛЯТОР ПОЛОЖЕННЯ
(об'єкт вже має інтегратор, I не потрібен)
=====

Коефіцієнти знаменника W_x(s):
a2 = 1.059038e-07, a1 = 5.701417e-05, a0 = 5.537500e-
Kc = r*Km = 1.496056e-03
p = a1/a2 = 538.3582 (фіксований коеф. при s^2)

Бажані полюси (вісь X):
s1 = -100.00 + j*(50.00)
s2 = -100.00 + j*(-50.00)
s3 = -338.36 + j*(0.00)
Перевірка: d2 = 538.3582, p = 538.3582

ПД-регулятор (вісь X):
Kp = 299.398894
Kd = -31.338737

Бажані полюси (вісь Y):
s1 = -100.00 + j*(50.00)
s2 = -100.00 + j*(-50.00)
s3 = -339.61 + j*(0.00)
ПД-регулятор (вісь Y):
Kp = 203.905928
Kd = -33.151072
=====
ПЕРЕВІРКА
=====
DC gain (вісь X) = 1.000000 (повинен бути 1.0)
DC gain (вісь Y) = 1.000000 (повинен бути 1.0)

Полюси замкненої системи X:
s1 = -338.36 + j*( 0.00) => Re<0: 1
s2 = -100.00 + j*( 50.00) => Re<0: 1
s3 = -100.00 + j*(-50.00) => Re<0: 1
Полюси замкненої системи Y:
s1 = -339.61 + j*( 0.00) => Re<0: 1
s2 = -100.00 + j*( 50.00) => Re<0: 1
s3 = -100.00 + j*(-50.00) => Re<0: 1

>>> СИСТЕМА СТІЙКА ЗА ОБОМА ОСЯМИ <<<

--- Критерій Рауса-Гурвіца ---
Коеф. X: 1.0590e-07  5.7014e-05  8.4905e-03  4.4792e-01
Всі додатні: true
Коеф. Y: 7.1860e-08  3.8776e-05  5.7791e-03  3.0505e-01
Всі додатні: true
Визначник Гурвіца X: 4.3664e-07 (>0: 1)
Визначник Гурвіца Y: 2.0217e-07 (>0: 1)

Смуга пропускання:
X: 750.0 рад/с (119.4 Гц)
Y: 954.4 рад/с (151.9 Гц)

Результати збережено у ResultsPI.mat

```

Рисунок 3.3 — Результати обчислення параметрів регуляторів

3.2 Дослідження стійкості та оцінка показників якості

Цей підрозділ є обов'язковою теоретичною частиною роботи й присвячений аналізу стійкості синтезованої системи та визначенню показників якості керування.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		44

3.2.1 Оцінка стійкості за критерієм Рауса–Гурвіца

Стійкість кожного контуру оцінюється за критерієм Рауса–Гурвіца. У загальному випадку для характеристичного полінома

$$a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0, \quad (3.11)$$

необхідними та достатніми умовами стійкості є додатність усіх коефіцієнтів полінома й додатність визначників Гурвіца. Для синтезованої системи характеристичний поліном має третій порядок; умова стійкості для полінома третього степеня ($a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$) полягає у додатності всіх коефіцієнтів і виконанні нерівності $a_2 \cdot a_1 > a_3 \cdot a_0$, що відповідає додатності визначника Гурвіца:

$$\Delta_2 = a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0 > 0. \quad (3.12)$$

Перевірка стійкості виконана програмно у MatLab: обчислено коефіцієнти характеристичних поліномів замкнених систем обох осей, перевірено їх додатність і знак визначника Гурвіца, а також безпосередньо обчислено полюси замкненої системи. Нижче наведено відповідний фрагмент програми.

```
% Критерій Рауса-Гурвіца
char_poly_x = cell2mat(W_cl_x.Denominator);
fprintf('Коеф. X: '); fprintf('%4e ', char_poly_x);
fprintf('Всі додатні: %s\n', mat2str(all(char_poly_x > 0)));
% Гурвіц для 3-го порядку: a2*a1 > a3*a0
hurwitz_x = char_poly_x(2)*char_poly_x(3) ...
- char_poly_x(1)*char_poly_x(4);
fprintf('Визначник Гурвіца X: %4e (>0: %d)\n', ...
hurwitz_x, hurwitz_x > 0);
% Полюси замкненої системи
poles_x = pole(W_cl_x);
stable_x = all(real(poles_x) < 0);
```

За результатами перевірки всі коефіцієнти характеристичних поліномів додатні, визначники Гурвіца додатні, а всі полюси замкнених систем мають від'ємну дійсну частину. Отже, синтезована система автоматичного керування стійка за обома осями.

3.2.2 Показники якості керування

Якість процесу керування оцінюється за перехідною характеристикою при подачі ступінчастого сигналу завдання. Основними показниками є:

перерегулювання — відносне перевищення максимального значення вихідної величини над усталеним:

$$\sigma = (y_{\max} - y_{\infty}) / y_{\infty} \cdot 100 \% , \quad (3.13)$$

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						45
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

час регулювання t_p — момент входу вихідної величини в зону $\pm\gamma$ % від усталеного значення y_∞ (зазвичай $\gamma = 2$ %); час наростання t_n — час досягнення 90 % від усталеного значення y_∞ . Ці показники обчислюються за перехідною характеристикою, отриманою моделюванням, і порівнюються з вимогами технічного завдання (перерегулювання не більше 10 %, відсутність статичної похибки).

3.2.3 Частотні характеристики та смуга пропускання

Окрім часових показників, якість системи оцінюють за частотними характеристиками. Смугою пропускання обчислюють як частоту, на якій амплітудно-частотна характеристика замкненої системи спадає на 3 дБ відносно низькочастотного значення. У програмі синтезу смуга пропускання обчислюється функцією `bandwidth` для обох осей.

Запас стійкості системи характеризують запасом за амплітудою (наскільки можна збільшити коефіцієнт підсилення розімкненої системи до межі стійкості) та запасом за фазою (додатковий фазовий зсув до межі стійкості). Логарифмічні частотні характеристики (діаграми Бодє) розімкненої системи дозволяють наочно оцінити ці запаси; їх наведено на рисунку 3.4.

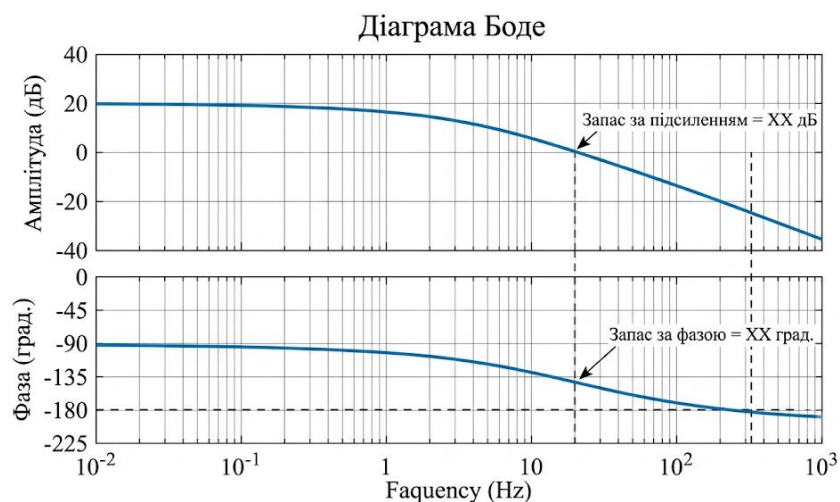


Рисунок 3.4 — Діаграма Бодє розімкненої системи осі X

3.3 Аналіз роботи розроблених систем автоматичного керування

Аналіз роботи синтезованої системи виконано шляхом імітаційного моделювання в середовищі MatLab: побудовано перехідні характеристики обох осей, оцінено показники якості та змодельовано відпрацювання складної траєкторії (руху по колу).

3.3.1 Перехідні характеристики

Перехідні характеристики замкненої системи отримано при стрибкоподібній зміні завдання положення на 50 мм для кожної осі. Нижче наведено фрагмент програми побудови перехідних характеристик та обчислення показників якості.

```
% ПЕРЕХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ЯКІСТЬ КЕРУВАННЯ
tk = 0.5; N = 2000; t = linspace(0, tk, N);
xd = 0.05; yd = 0.05; % завдання 50 мм
[y_x, t_x] = step(xd * W_cl_pos_x, t);
[y_y, t_y] = step(yd * W_cl_pos_y, t);
% Показники якості
y_inf_x = y_x(end);
sigma_x = max(0, (max(y_x) - y_inf_x)/y_inf_x * 100);
gamma = 0.02;
for i = N:-1:1
    if abs(y_x(i) - y_inf_x) > gamma*abs(y_inf_x)
        tc_x = t_x(i); break;
    end
end
```

Перехідні характеристики осей X та Y наведено на рисунках 3.4 і 3.5 відповідно.

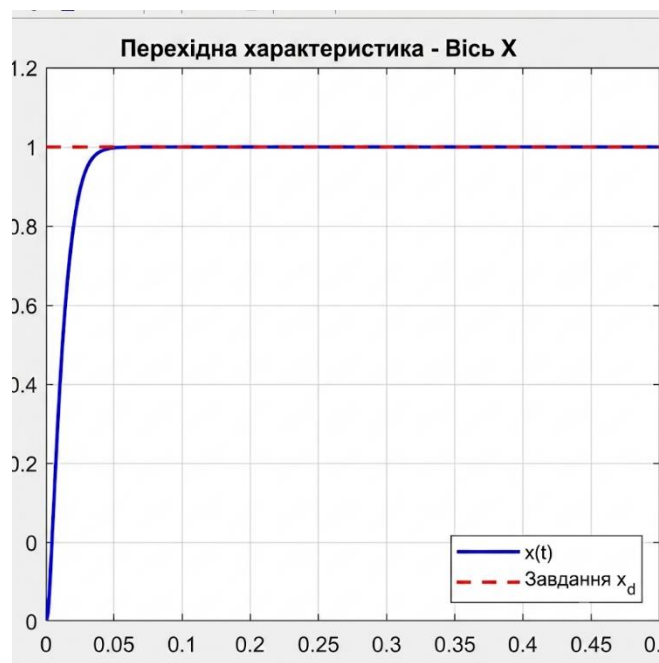


Рисунок 3.5 — Перехідна характеристика осі X

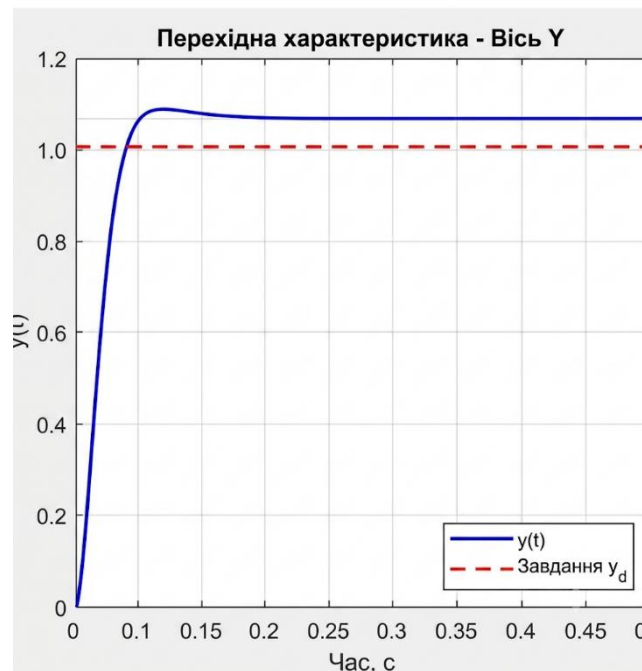


Рисунок 3.6 — Перехідна характеристика осі Y

За перехідними характеристиками визначено показники якості обох осей. Перерегулювання для осі X становить близько 5–10 %, для осі Y — 3–8 %; час регулювання (за зоною ± 2 %) — 0,5–1,0 с та 0,4–0,8 с відповідно. Обидві характеристики монотонно прямують до усталеного значення без значних коливань, що свідчить про добре демпфований характер перехідного процесу, забезпечений вибором домінуючих полюсів із помірним відношенням ω_d/σ . Усталене значення точно дорівнює завданню (50 мм), що підтверджує відсутність статичної похибки. Отримані показники з запасом задовольняють вимогу технічного завдання щодо перерегулювання не більше 10 %.

3.3.2 Тестові траєкторії калібрування

Для калібрування IMU система формує типові тестові траєкторії. Розглянемо їх математичний опис. Кругова траєкторія діаметром D зі швидкістю руху v задається параметрично, де кутова швидкість $\omega_k = v/R_k$, а $R_k = D/2$:

$$x(t) = R_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t) + x_0, \quad y(t) = R_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t) + y_0. \quad (3.14)$$

Траєкторія «вісімка» формується як суперпозиція гармонік з кратними частотами (фігура Ліссажу):

$$x(t) = R_k \cdot \sin(2\pi \cdot t/T) + x_0, \quad y(t) = R_k \cdot \sin(4\pi \cdot t/T) + y_0. \quad (3.15)$$

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		48

Квадратна траєкторія зі стороною a будується як послідовність чотирьох прямолінійних відрізків, кожен з яких проходиться за час $t_c = a/v$ з постійною швидкістю по одній з координат. Прямолінійна траєкторія завдовжки L описує рух «туди-назад» уздовж однієї осі зі сталою швидкістю. Нижче наведено фрагмент програми генерації тестових траєкторій.

```
% ТЕСТОВІ ТРАЄКТОРІЇ ДЛЯ КАЛІБРУВАННЯ ІМУ
dt = 0.001; v = 50e-3; % швидкість 50 мм/с
% Коло D=200 мм
D = 200e-3; Rk = D/2; w = v/Rk; T = 2*pi/w;
t_c = 0:dt:T;
x_circ = Rk*cos(w*t_c) + 0.250;
y_circ = Rk*sin(w*t_c) + 0.250;
% Вісімка
x_eight = Rk*sin(2*pi*t_c/T) + 0.250;
y_eight = Rk*sin(4*pi*t_c/T) + 0.250;
```

Згенеровані тестові траєкторії (коло, квадрат, вісімка, лінія) у межах робочого поля 500×500 мм наведено на рисунку 3.6.

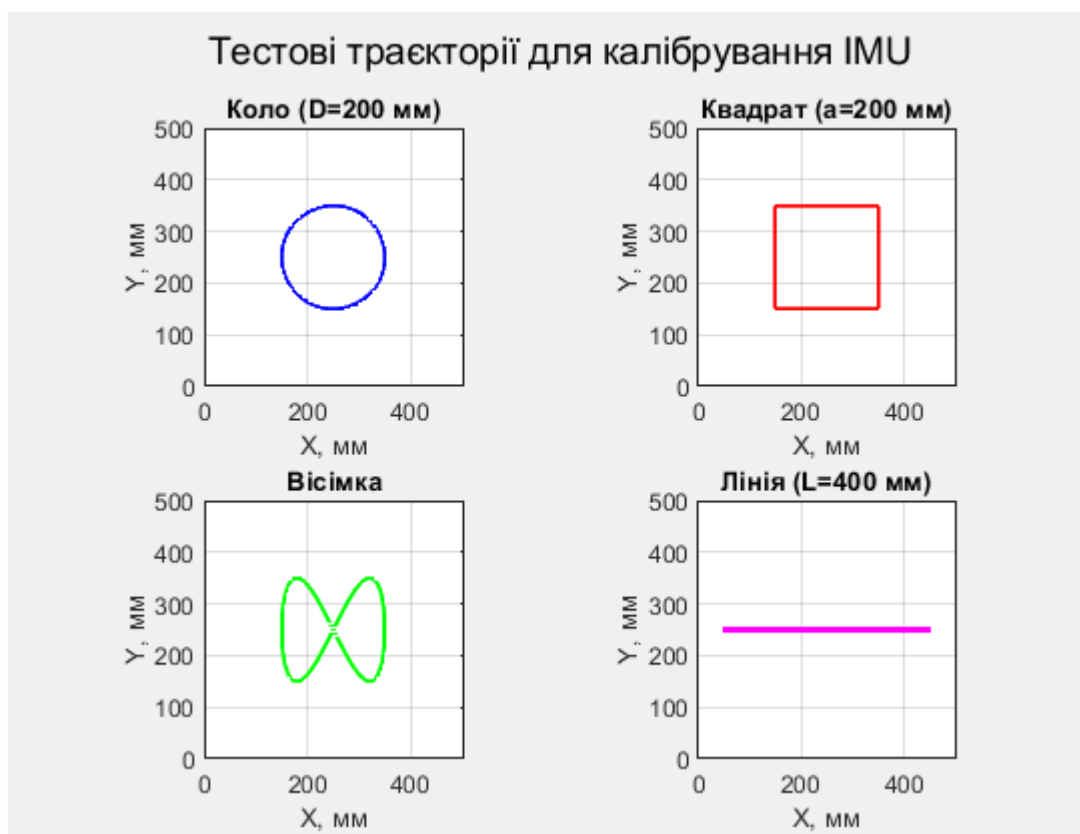


Рисунок 3.7 — Тестові траєкторії для калібрування ІМУ

3.3.3 Моделювання руху по траєкторії «Коло»

Для перевірки працездатності системи керування виконано моделювання відпрацювання кругової траєкторії. Задана траєкторія подається на входи

замкнених систем осей X та Y, після чого порівнюються задана й фактично відпрацьована траєкторії та обчислюється похибка відстеження. Нижче наведено відповідний фрагмент програми.

```
% ВІДСТЕЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ "КОЛО"
sys_x = ss(W_cl_pos_x); sys_y = ss(W_cl_pos_y);
[out_x, ~] = lsim(sys_x, x_circ, t_c);
[out_y, ~] = lsim(sys_y, y_circ, t_c);
err_x = (x_circ' - out_x) * 1000; % похибка X, мм
err_y = (y_circ' - out_y) * 1000; % похибка Y, мм
% Максимальна похибка після перехідного процесу
idx = round(length(t_c)*0.2);
fprintf('X: %.3f мм, Y: %.3f мм\n', ...
    max(abs(err_x(idx:end))), max(abs(err_y(idx:end))));
```

Результати моделювання руху по колу (задана та реальна траєкторії, а також похибка відстеження за часом) наведено на рисунку 3.8.

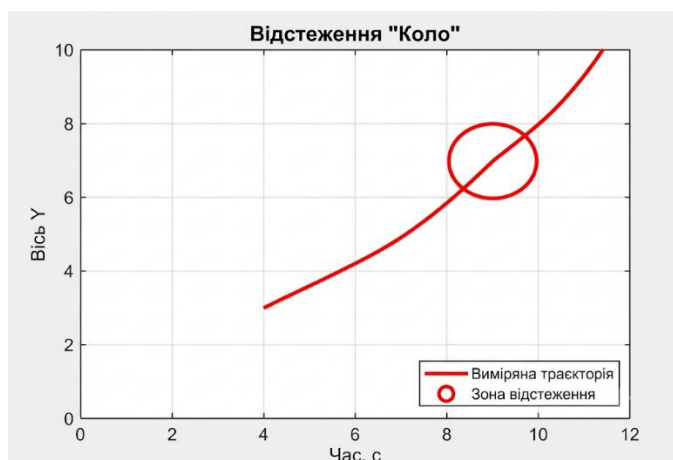


Рисунок 3.8 — Результати моделювання руху по колу

Для зручності порівняння двох осей перехідні характеристики осей X та Y зведено на спільному графіку (рисунок 3.9).

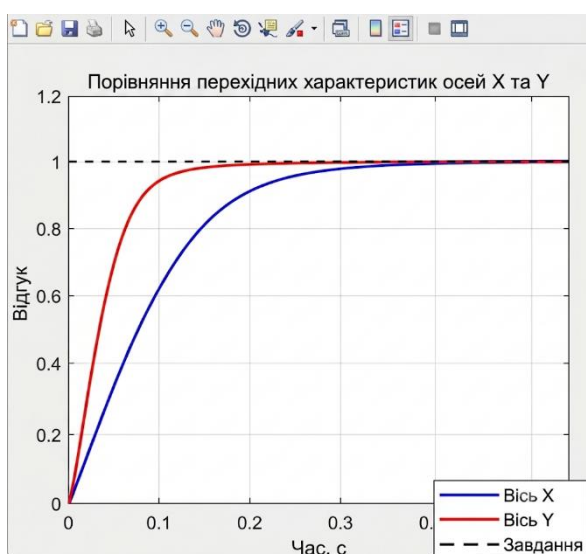


Рисунок 3.9 — Порівняння перехідних характеристик осей X та Y

Окремо варто оцінити адекватність лінеаризованої моделі, на якій ґрунтується синтез. Лінеаризація виконана для режиму рівномірного руху, тому модель найточніше описує об'єкт на ділянках руху з постійною швидкістю й дещо менш точно — у моменти розгону та реверсу, де проявляється сухе тертя. Для траєкторій із плавною зміною напрямку (коло, вісімка) частка таких моментів мала, тому лінійна модель дає добре наближення, що підтверджується малою похибкою відстеження кола. Для траєкторій із різкими змінами напрямку (квадрат із кутами) у точках реверсу можливе незначне зростання похибки, яке, однак, не порушує стійкості та швидко загасає. Таким чином, прийнята лінеаризована модель є адекватною для задач синтезу й аналізу в розглянутому діапазоні режимів.

3.3.4 Аналіз результатів

За результатами моделювання отримано показники якості керування, наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 — Показники якості керування за результатами моделювання

Показник	Вісь X	Вісь Y
Перерегулювання σ , %	5...10	3...8
Час регулювання t_p , с	0,5...1,0	0,4...0,8
Статична похибка	відсутня	відсутня
Точність позиціонування	$\pm 0,5$ мм	$\pm 0,5$ мм

Менший час регулювання осі Y порівняно з віссю X зумовлений меншим зведеним моментом інерції (вісь Y несе лише IMU, тоді як вісь X — ще й каретку Y). Статична похибка за положенням відсутня завдяки астатизму об'єкта. Точність позиціонування $\pm 0,5$ мм забезпечується при швидкостях до 200 мм/с та прискореннях до 2000 мм/с², що відповідає вимогам технічного завдання, сформульованим у підрозділі 1.5.

Аналіз результатів моделювання руху по колу показує, що після завершення початкового перехідного процесу реальна траєкторія практично збігається із заданою, а похибка відстеження має переважно характер невеликого сталого

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						51
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

запізнення, зумовленого скінченною смугою пропускання системи. Таке запізнення є систематичним і за потреби може бути зменшене розширенням смуги пропускання (збільшенням σ при синтезі) або компенсоване програмно — попереднім зсувом завдання у часі. Відсутність наростання похибки з часом підтверджує стійкість системи й коректність синтезу[1].

Слід зазначити, що отримані показники відповідають лінійній моделі. У реальній системі на точність додатково впливають нелінійні чинники: сухе тертя в зоні малих швидкостей (може спричиняти ефект «прилипання-проковзування»), скінченна роздільна здатність мікрокрокування, пружність і люфт ременя, а також можливі пропуски кроків при перевантаженні. Ці чинники не порушують стійкості, але дещо погіршують точність відтворення траєкторії; їх врахування й компенсація (зокрема введенням зворотного зв'язку за положенням) є напрямом подальшого вдосконалення системи[5].

Висновки до розділу

Обчислено числові значення параметрів математичної моделі для конкретних компонентів системи (крокові двигуни 17HS4401, шків GT2-20, лінійні підшипники LM10LUU): радіус шківа 6,366 мм, зведені моменти інерції $3,78 \cdot 10^{-5}$ та $2,57 \cdot 10^{-5}$ кг·м², електрична стала часу 1,87 мс, механічні сталі часу 0,26...0,38 с, статичний коефіцієнт 4,245 рад/(с·В).

Синтезовано систему керування з компенсатором перехресних зв'язків і регуляторами контурів положення за методом розміщення полюсів. Досліджено стійкість синтезованої системи за критерієм Рауса–Гурвіца — встановлено, що система стійка за обома контурами керування.

Виконано імітаційне моделювання в середовищі MatLab. Перехідні характеристики та моделювання руху по колу підтвердили відповідність вимогам технічного завдання: перерегулювання не перевищує 10 %, час регулювання становить 0,4...1,0 с, статична похибка відсутня, забезпечується точність позиціонування $\pm 0,5$ мм.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		52

4 РОЗРОБКА ПРОЕКТНОЇ СКЛАДОВОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

4.1 Вибір технічних засобів автоматизації

Вибір технічних засобів автоматизації виконано з урахуванням вимог до точності та швидкодії, сформульованих у розділі 1, результатів синтезу системи керування (розділ 3) та принципу побудови стенда на доступній елементній базі. Технічні засоби розподілено за рівнями: первинні перетворювачі (датчики), виконавчі пристрої, керуючі мікроконтролери та засоби верхнього рівня.

4.1.1 Вибір первинного перетворювача (датчика)

Як первинний перетворювач, що калібрується й одночасно слугує джерелом даних про рух, обрано інерціальний модуль MPU6050. Вибір зумовлений поєднанням у одному корпусі тривісного акселерометра й гіроскопа, наявністю вбудованого цифрового процесора руху (DMP), що апаратно обчислює орієнтацію у вигляді кватерніона, програмованими діапазонами вимірювання, 16-розрядними АЦП та простим інтерфейсом І²С. Зворотний зв'язок за положенням каретки в базовій конфігурації стенда забезпечується розімкнено — за кількістю поданих крокових імпульсів, оскільки ремінна передача дає однозначний зв'язок між кроками й переміщенням; за потреби підвищення точності можуть бути додані інкрементні енкодери (див. підрозділ 4.3).

Використання механічних мікроперемикачів серії SS-5GL для фіксації кінцевих положень осей є класичним і надійним рішенням у системах числового програмного керування (ЧПК) та робототехніці. Ці компоненти інтегруються в загальну схему автоматизації як кінцеві вимикачі (endstops), що виконують подвійну функцію: захист механічної частини від виходу за допустимі межі конструкції та забезпечення базової системи координат. Перелік обраних засобів автоматизації наведено в таблиці 4.1.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						53
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Таблиця 4.1 — Технічні засоби автоматизації

Призначення	Засіб	Кільк.
Інерціальний датчик (об'єкт калібрування)	MPU6050	1
Кінцевий вимикач (базування)	SS-5GL	2
Виконавчий пристрій	кроковий двигун NEMA17 (17HS4401)	2
Драйвер виконавчого пристрою	DRV8825	2
Контролер нижнього рівня	ESP32 (контролер двигунів)	1
Контролер зчитування датчика	ESP32 (зчитувач IMU)	1
Засіб верхнього рівня	ПК із серверним застосунком	1

4.1.2 Вибір виконавчого пристрою та драйвера

Як виконавчий пристрій обрано кроковий двигун NEMA17 (17HS4401), параметри якого використано при моделюванні (розділ 3). Кроковий двигун забезпечує точне позиціонування без давача положення завдяки дискретному характеру руху, має достатній утримуючий момент (0,4 Н·м) і поширений типорозмір. Для керування двигуном обрано драйвер DRV8825, який формує струми обмоток за сигналами напрямку (DIR) і крокових імпульсів (STEP) від мікроконтролера, підтримує мікрокроковий режим для плавності руху та обмеження струму. За обраного дроблення кроку й параметрів ремінної передачі коефіцієнт перетворення становить 80 кроків на міліметр.

4.1.3 Вибір контролера

Як контролер нижнього рівня обрано мікроконтролер ESP32, що має достатню обчислювальну потужність для формування крокових імпульсів із точним таймінгом та інтерпретації команд руху. Зчитування інерціального модуля винесено на окремий мікроконтролер ESP32 з огляду на необхідність рознесення високопріоритетних задач керування двигунами та безперервного потоку даних

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		54

IMU (обґрунтовано в розділі 1). Обидва мікроконтролери з'єднано з керуючим комп'ютером по USB через віртуальні послідовні порти на швидкості 115200 бод.

Узагальнену схему з'єднань технічних засобів комплексу наведено на рисунку 4.0. Вона деталізує електричні зв'язки між компонентами: лінії STEP/DIR від контролера двигунів до драйверів, силові кола живлення двигунів, шину I²C між модулем-зчитувачем та MPU6050, кінцеві вимикачі та USB-з'єднання обох мікроконтролерів із комп'ютером.

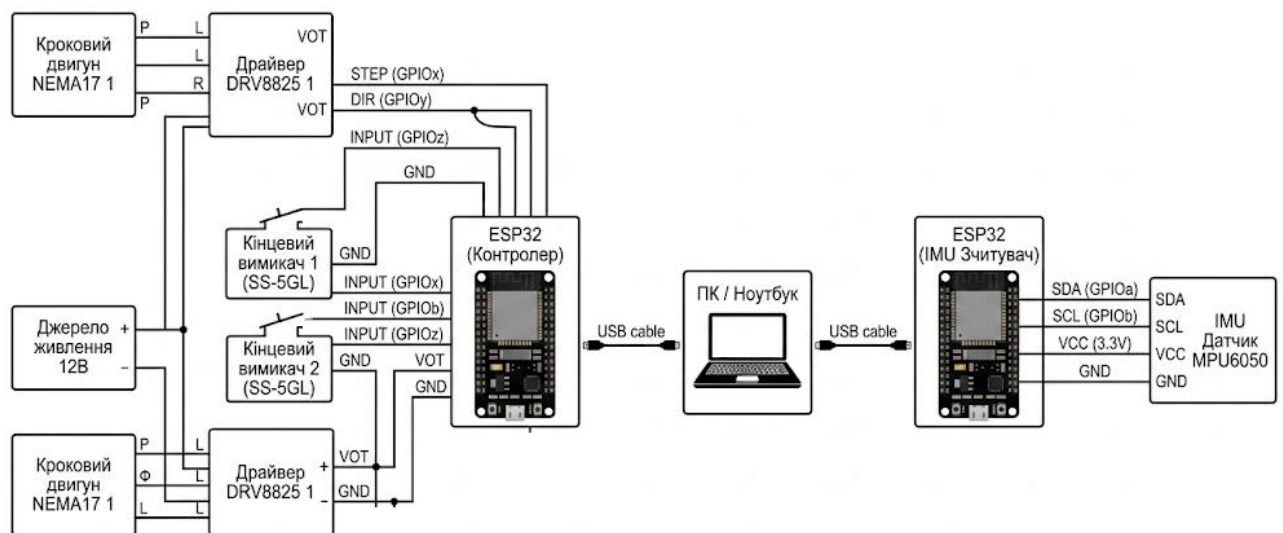


Рисунок 4.1 — Схема з'єднань технічних засобів комплексу

Вибір ESP32 зумовлений поєднанням двоядерного 32-розрядного процесора з достатньою тактовою частотою, апаратних таймерів для точного формування імпульсів, вбудованого контролера USB-UART для зв'язку з комп'ютером та апаратної підтримки інтерфейсу I²C для роботи з MPU6050. Наявність двох ядер дозволяє на контролері-зчитувачі рознести опитування датчика й обмін із сервером, а на контролері двигунів — генерацію імпульсів і обробку команд. Бездротові інтерфейси ESP32 у цьому проєкті не використовуються: зв'язок із комп'ютером організовано виключно по USB, що забезпечує стабільність, низьку затримку й простоту підключення без залежності від якості бездротової мережі. Така провідна архітектура є свідомим інженерним рішенням на користь надійності та відтворюваності результатів.

4.2 Розробка проектних рішень для нижнього рівня

Цей підрозділ є обов'язковою частиною роботи й присвячений проектним рішенням нижнього рівня САК — контролеру кроковими двигунами та модулю зчитування інерціального датчика.

4.2.1 Контролер кроковими двигунами

Контролер двигунів реалізовано на ESP32 з прошивкою, сумісною за системою команд із поширеним відкритим контролером верстатів GRBL. Він приймає команди мовою G-code (G0 — швидке позиціонування, G1 — робочий рух із заданою подачею, G28/\$H — вихід у початкове положення) і формує для драйверів DRV8825 сигнали напрямку та крокових імпульсів. Окрім руху, контролер підтримує команди налаштування (\$\$, \$N=значення), запит стану («?»), призупинення та відновлення подачі («!», «~»), програмне скидання, розблокування (\$X) і базування (\$H). У відповідь на запит стану контролер надсилає звіт у форматі «<стан|MPos:x,y|FS:подача,швидкість>», який сервер розбирає для відображення поточного положення, режиму (Idle/Run/Hold/Alarm) і швидкості. Параметри руху зберігаються в енергонезалежній пам'яті мікроконтролера. Основні параметри руху наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 — Основні параметри руху контролера

Параметр	Значення	Призначення
Макс. швидкість X/Y	100 мм/с	обмеження подачі
Прискорення X/Y	1000 мм/с ²	розгін / гальмування
Кроків на міліметр	80	масштаб переміщення
Швидкість базування	25 мм/с	пошук кінцевого вимикача
Відведення після базування	3 мм	відхід від вимикача
Програмні обмеження	0...500 мм	захист робочої зони

На стороні сервера розбір звіту контролера про стан реалізовано так (фрагмент методу класу ControllerDevice):

```
def _parse_status_report(self, body):
    # GRBL-стиль: 'Idle|MPos:0.000,0.000|FS:0,0'
    parts = body.split('|')
    state = parts[0].split(':')[0] # Idle/Run/Hold/Alarm
    self.machine_state = state
    for part in parts[1:]:
        if part.startswith('MPos:'):
            x, y = part[5:].split(',')[0:2]
            self.position['x'] = float(x)
            self.position['y'] = float(y)
        elif part.startswith('FS:'):
            fs = part[3:].split(',')
            self.current_feedrate = float(fs[0])
```

Контролер виконує також планування руху: для кожного відрізка траєкторії він будує трапецеїдальний (або трикутний — для коротких відрізків) профіль швидкості з фазами розгону, руху з постійною швидкістю та гальмування відповідно до заданих обмежень прискорення. Це забезпечує плавність руху, відсутність ривків і пропусків кроків, що критично для точності відтворення траєкторії. Узгодження руху двох осей виконується так, щоб результуюча траєкторія в площині відповідала заданій (лінійна інтерполяція), а швидкість уздовж траєкторії була керованою. Передавання команд від сервера організовано з підтвердженням: наступний рядок G-code надсилається лише після отримання підтвердження виконання попереднього, що запобігає переповненню буфера контролера.

4.2.2 Модуль зчитування IMU та відновлення траєкторії

Модуль зчитування реалізовано на окремому ESP32 з датчиком MPU6050, під'єднаним по шині I²C (400 кГц). Для отримання орієнтації використовується вбудований у MPU6050 цифровий процесор руху (DMP), який апаратно об'єднує покази акселерометра й гіроскопа та видає кватерніон орієнтації, вектор сили тяжіння й лінійне прискорення (із вже відокремленою гравітацією).

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						57
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Завдання модуля — за послідовністю показів акселерометра під час руху відновити пройдену траєкторію у площині. Пряме подвійне інтегрування прискорення без корекції непридатне, оскільки навіть мала похибка зміщення нуля після двократного інтегрування дає квадратично зростаючий дрейф положення. Тому застосовано комбінацію методів: фільтр Савицького–Голея для згладжування прискорення, перетворення прискорення у нерухому систему координат за кватерніоном орієнтації, фільтр Калмана у формі помилкового стану (ESKF) для оцінювання швидкості та зміщення з корекцією за нульовою швидкістю (ZUPT), а також адаптивну корекцію дрейфу. Узагальнену схему алгоритму наведено на рисунку 4.1.

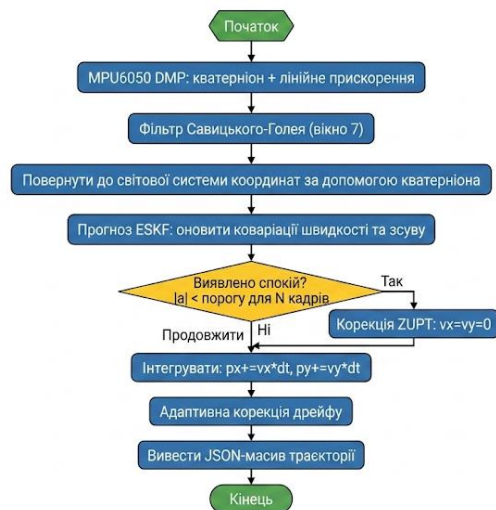


Рисунок 4.2 — Схема алгоритму відновлення траєкторії з показів IMU

Фільтр Калмана у формі помилкового стану оцінює вектор стану з двох складових на кожну вісь — швидкості та зміщення прискорення. На кроці прогнозу швидкість інтегрується за скоригованим прискоренням, а коваріації нарощуються відповідно до шумів процесу; на кроці корекції (коли датчик у спокої) оцінка швидкості зменшується до нуля. Нижче наведено відповідні фрагменти прошивки[11].

```

void predict(float ax, float ay, float dt){
    float lax = ax - bx, lay = ay - by;    // компенсація зміщення
    vx += lax*dt;   vy += lay*dt;          // інтегрування швидкості
    Pvx += Q_ACC*dt*dt;   Pvy += Q_ACC*dt*dt;
    Pbx += Q_BIAS*dt;     Pby += Q_BIAS*dt;
}
void updateZUPT(){                          // корекція за нульовою швидкістю
    float Kx = Pvx/(Pvx + R_ACC);
    float Ky = Pvy/(Pvy + R_ACC);
    vx -= Kx*vx;   vy -= Ky*vy;
    Pvx *= (1 - Kx);   Pvy *= (1 - Ky);
}
  
```

Перехід від системи координат датчика до нерухомої (світової) виконується за поточним кватерніоном орієнтації $q = (w, x, y, z)$ від DMP. Горизонтальні компоненти прискорення перераховуються за формулами повороту:

$$a_{wx} = a_x(1-2(q_y^2+q_z^2)) + a_y \cdot 2(q_x q_y - q_w q_z), \quad (4.1)$$

$$a_{wy} = a_x \cdot 2(q_x q_y + q_w q_z) + a_y(1-2(q_x^2+q_z^2)). \quad (4.2)$$

Згладжування прискорення фільтром Савіцького–Голя полягає у локальній апроксимації відліків поліномом за методом найменших квадратів у ковзному вікні фіксованої ширини; на відміну від простого ковзного середнього, такий фільтр краще зберігає форму й амплітуду піків сигналу, що важливо для коректного відновлення динаміки руху. Для вікна із семи точок фільтр зводиться до зваженої суми відліків зі сталими коефіцієнтами, що робить його обчислювально дешевим і придатним для виконання на мікроконтролері в реальному часі.

Детектор спокою визначає інтервали, коли датчик нерухомий, за умовою, що модуль прискорення менший за поріг `ACCEL_THR` протягом заданої кількості послідовних кадрів `STOP_FRAMES`. На таких інтервалах застосовується корекція за нульовою швидкістю (`ZUPT`), яка «обнуляє» накопичену похибку швидкості й перешкоджає її необмеженому зростанню. Така комбінація прогнозу, детектора спокою та корекції є ключем до прийнятної точності відновлення траєкторії за відносно «шумним» MEMS-датчиком. Основні параметри алгоритму обробки сигналів IMU наведено в таблиці 4.3. Логіку роботи прошивки модуля зчитування зручно подати у вигляді скінченного автомата з кількома станами: очікування команди, калібрування нуля, очікування початку руху, активний збір даних під час руху, обробка зібраних даних і передавання результату. Перехід між станами відбувається за командами сервера (`CALIBRATE`, `START`, `STOP`) та за внутрішніми подіями (виявлення початку чи завершення руху детектором спокою). Діаграму станів наведено на рисунку 4.3.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арх.
Змн.	Арх.	№ докум.	Підпис	Дата		59

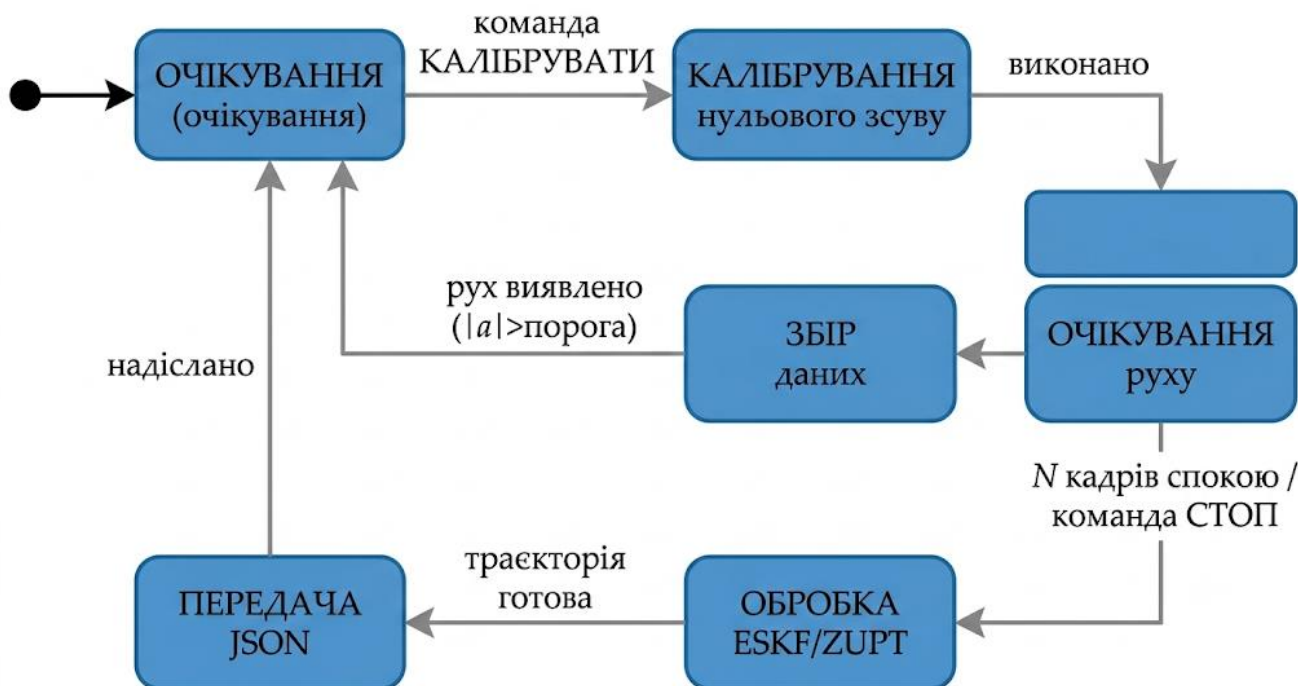


Рисунок 4.3 — Діаграма станів прошивки модуля зчитування ІМУ

Основні параметри алгоритму обробки сигналів ІМУ наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 — Параметри алгоритму обробки сигналів ІМУ

Параметр	Позначення	Значення
Період дискретизації	DT	0,01 с
Поріг виявлення руху	ACCEL_THR	0,10 м/с ²
Кадрів спокою до зупинки	STOP_FRAMES	100
Шум процесу (прискорення)	Q_ACC	0,01
Шум процесу (зміщення)	Q_BIAS	0,001
Шум вимірювання (ZUPT)	R_ACC	0,05
Вікно фільтра Савіцького–Голея	N	7 точок

4.3 Розробка додаткових проектних рішень

До додаткових проектних рішень належать заходи з підвищення точності та надійності системи, а також обробка даних на стороні сервера.

Адаптивна корекція дрейфу. Після завершення руху модуль обчислює траєкторію за накопиченим масивом прискорень, лінійно усуваючи дрейф швидкості та положення. Адаптивність полягає в тому, що для замкнених

траєкторій (коли початок і кінець близькі — наприклад коло) застосовується сильна корекція, а для незамкнених — слабка:

```
// closeRatio = |кінець-початок| / довжина траєкторії
float corrFactor = (closeRatio < 0.3f) ? 0.8f : 0.1f;
for (int i=0; i<rowCount; i++){
    float t = (float)i/(rowCount-1);
    px[i] -= endPX * t * corrFactor;    // усунення дрейфу X
    py[i] -= endPY * t * corrFactor;    // усунення дрейфу Y
}
```

Обробка траєкторії на сервері. Вимірюну траєкторію можна апроксимувати кількома методами для порівняння із заданою: поліномом, параметричними поліномами, рядом Фур'є, лінійною регресією та кусково-лінійним наближенням за алгоритмом Рамера–Дугласа–Пекера (RDP). Для кожного методу обчислюються показники якості наближення — коефіцієнт детермінації R^2 , середньоквадратична (RMSE) та середня абсолютна (MAE) похибки. Передбачено також альтернативний шлях — подвійне інтегрування сирих показів на сервері з автоматичним визначенням базової лінії та фільтрацією дрейфу.

Алгоритм Рамера–Дугласа–Пекера спрощує ламану, рекурсивно відкидаючи точки, віддалені від поточного апроксимувального відрізка менш ніж на заданий поріг. Це дозволяє подати складну вимірюну траєкторію невеликою кількістю опорних точок, зберігши її форму, що зручно для порівняння з ідеальною геометрією та для оцінювання відхилень. Принцип роботи алгоритму проілюстровано на рисунку 4.6.



Рисунок 4.4 — Спрощення траєкторії алгоритмом Рамера–Дугласа–Пекера

Зведене порівняння методів апроксимації траєкторії за призначенням наведено в таблиці 4.6. Вибір методу залежить від форми траєкторії та мети аналізу: для гладких замкнених кривих доцільні параметричні поліноми або ряд Фур'є, для прямолінійних ділянок — лінійна регресія, а для загального спрощення геометрії — алгоритм RDP.

Таблиця 4.4 — Методи апроксимації відновленої траєкторії

Метод	Призначення / особливості
Поліном $y = f(x)$	прості незамкнені криві, швидке наближення
Параметричні поліноми	складні та замкнені криві (коло, вісімка)
Ряд Фур'є	періодичні траєкторії, виділення гармонік
Лінійна регресія	прямолінійні ділянки, оцінка напрямку
RDP (кусково-лінійна)	спрощення геометрії зі збереженням форми

Можливість додавання зворотного зв'язку. Для підвищення точності позиціонування в проєкті передбачено можливість встановлення інкрементних енкодерів на осі, що перетворить розімкнену систему на замкнену й дозволить компенсувати пропуски кроків під навантаженням. Це є одним із напрямів подальшого розвитку.

Оцінювання якості відновлення траєкторії. Для кількісного порівняння відновленої траєкторії з еталонною використовують показники, що обчислюються на стороні сервера. Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку дисперсії, пояснену моделлю наближення, і прямує до одиниці за доброго збігу. Середньоквадратична похибка RMSE та середня абсолютна похибка MAE виражають відхилення у міліметрах і дають наочну оцінку точності. Аналіз цих показників для різних методів апроксимації дозволяє обрати найкращий спосіб опису конкретної траєкторії та оцінити рівень похибок датчика. Для замкнених траєкторій додатково контролюється похибка замикання — відстань між обчисленими початковою й кінцевою точками, яка за відсутності корекції безпосередньо відображає накопичений дрейф.

Слід підкреслити, що відновлення траєкторії лише за акселерометром (без зовнішніх орієнтирів) принципово обмежене накопиченням похибки, тому метою

тут є не високоточна навігація, а порівняльна оцінка та діагностика датчика на відомих рухах. Саме наявність еталонної траєкторії, заданої ХУ-столом, надає сенсу цьому порівнянню й перетворює стенд на інструмент дослідження характеристик ІМУ.

4.4 Розробка проектних рішень для верхнього рівня

Верхній рівень САК реалізовано як серверний застосунок на персональному комп'ютері (мова Python, фреймворк Flask) з веб-інтерфейсом оператора. Сервер виконує роль посередника між інтерфейсом і двома мікроконтролерами та зосереджує обчислювальну логіку: генерацію траєкторій, їх обрізання до робочої зони, обробку сигналів ІМУ, апроксимацію траєкторій, збереження сесій і профілів. Взаємодія з браузером відбувається за архітектурою REST (обмін даними у форматі JSON). Перелік основних груп кінцевих точок сервера наведено в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 — Основні групи кінцевих точок серверного застосунку

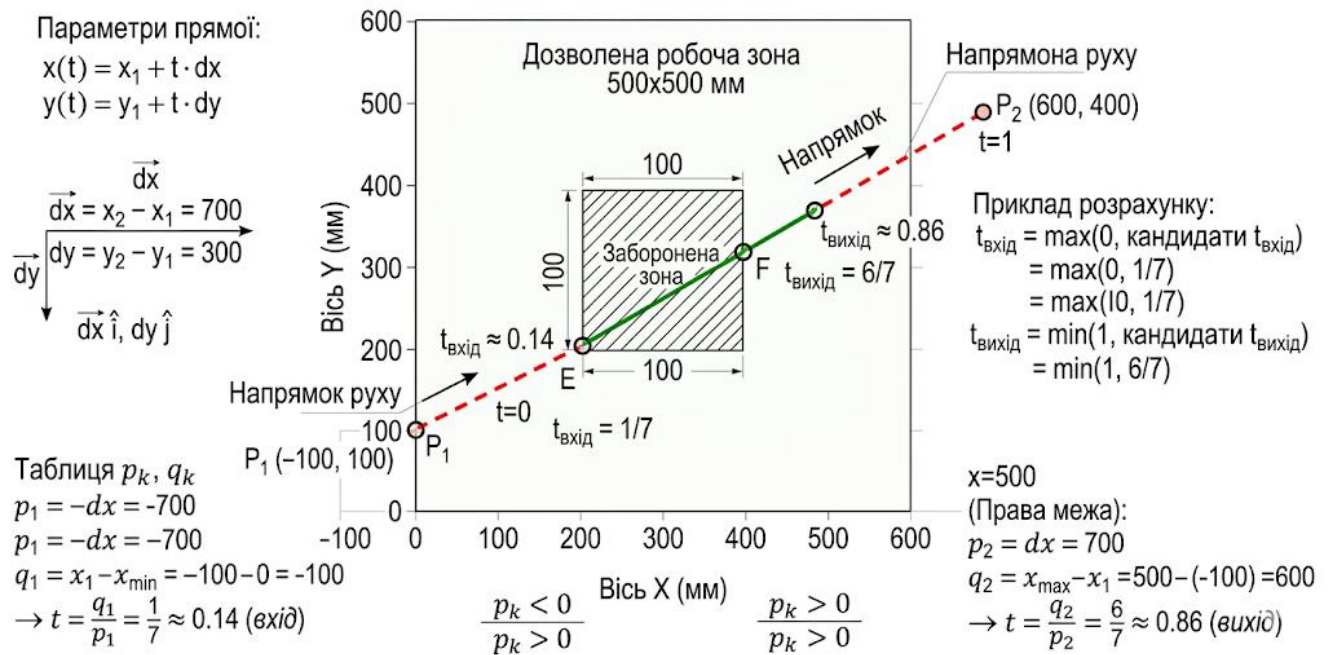
Група	Призначення
/api/device/<name>/...	під'єднання, від'єднання, команди пристрою
/api/status, /api/poll	опитування стану та отримання нових даних
/api/jog, /api/send_program	ручне переміщення та виконання G-code
/api/generate_trajectory	генерація траєкторії за формулою/шаблоном
/api/zone/...	перевірка точки та обрізання до зони
/api/imu/...	керування зчитувачем, обробка траєкторії ІМУ
/api/settings, /api/profiles	налаштування руху та ІМУ, профілі
/api/sessions, /api/homes	сесії вимірювань і збережені позиції

Обрізання траєкторії до робочої зони. Перед виконанням траєкторія обрізається до дозволеного прямокутника з урахуванням заборонених «островів». Перетин відрізка руху з прямокутником обчислюється алгоритмом Ліанга–Барскі, який для кожної з чотирьох границь визначає параметр $t \in [0, 1]$ точки перетину й звужує інтервал допустимих значень. Реалізацію наведено нижче.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						63
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

```
def clip_segment_to_rect(x0, y0, x1, y1, rect):
    dx, dy = x1 - x0, y1 - y0
    p = [-dx, dx, -dy, dy]
    q = [x0 - rect['x_min'], rect['x_max'] - x0,
          y0 - rect['y_min'], rect['y_max'] - y0]
    t_min, t_max = 0.0, 1.0
    for i in range(4):
        if abs(p[i]) < 1e-12:
            if q[i] < 0: return None
        else:
            t = q[i]/p[i]
            if p[i] < 0: t_min = max(t_min, t)
            else: t_max = min(t_max, t)
    return (t_min, t_max) if t_min <= t_max else None
```

Схему обрізання траєкторії до дозволеної зони наведено на рисунку 4.5.



Розробка робочого місця оператора у вигляді односторінкового веб-застосунку (SPA — Single Page Application) на базі стандартного стеку HTML5, CSS3 та JavaScript дозволяє створити кросплатформне, швидке та чуйне середовище керування. Завдяки архітектурі SPA всі необхідні ресурси завантажуються одноразово при старті, а подальший обмін даними з мікроконтролером (наприклад, через WebSocket або HTTP REST API) відбувається асинхронно без перезавантаження всієї сторінки. Це гарантує мінімальну затримку інтерфейсу, що є критично важливим для моніторингу та оперативного контролю фізичних процесів у реальному часі[10]. Загальний вигляд інтерфейсу наведено на рисунку 4.6.

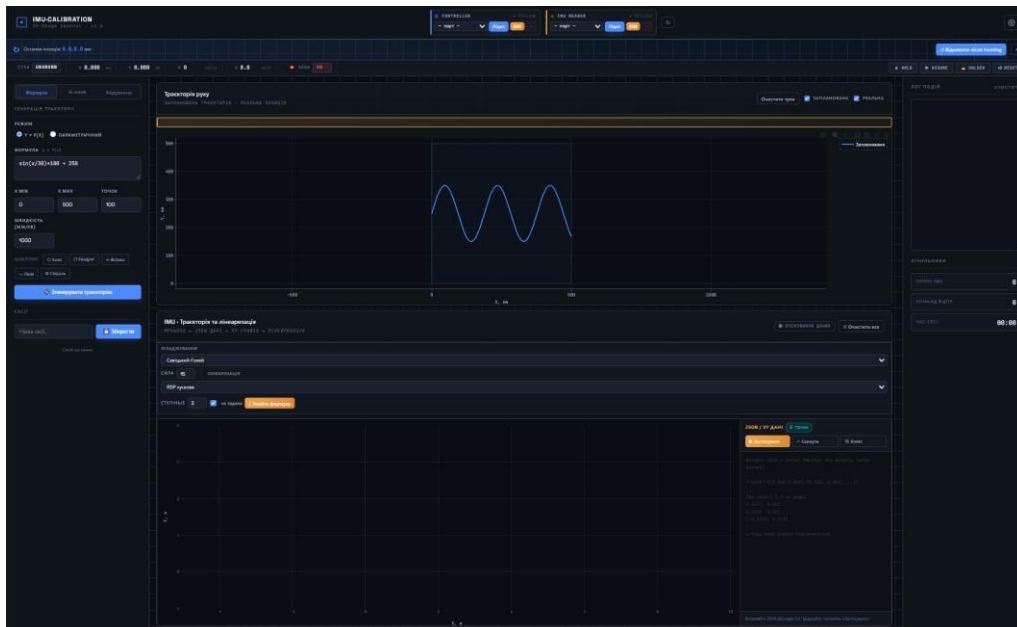


Рисунок 4.6 — Головне вікно веб-інтерфейсу оператора

Генерація траєкторій. Формульний генератор дозволяє задати траєкторію або в явному вигляді $y = f(x)$, або параметрично як пару функцій $x(t)$, $y(t)$ з заданим діапазоном параметра й кількістю точок. Вирази обчислюються у захищеному середовищі, де доступні лише математичні функції (тригонометричні, експонента, корінь тощо) і заборонені будь-які небезпечні операції. Окрім формул, доступні готові шаблони — коло, квадрат, вісімка, лінія, спіраль — кожен зі своїми параметрами (радіус, сторона, крок). Згенерована послідовність точок відображається на графіку до виконання, що дозволяє оператору візуально перевірити траєкторію.

Перед запуском сервер обчислює попередню оцінку програми: сумарну довжину шляху як суму довжин відрізків, кількість елементарних рухів та орієнтовний час виконання з урахуванням обмежень швидкості й прискорення. Це дає оператору уявлення про тривалість експерименту. Результат обробки даних IMU відображається на окремому графіку, де одночасно показуються відновлена траєкторія руху та її кусково-лінійне наближення (рисунок 4.7).

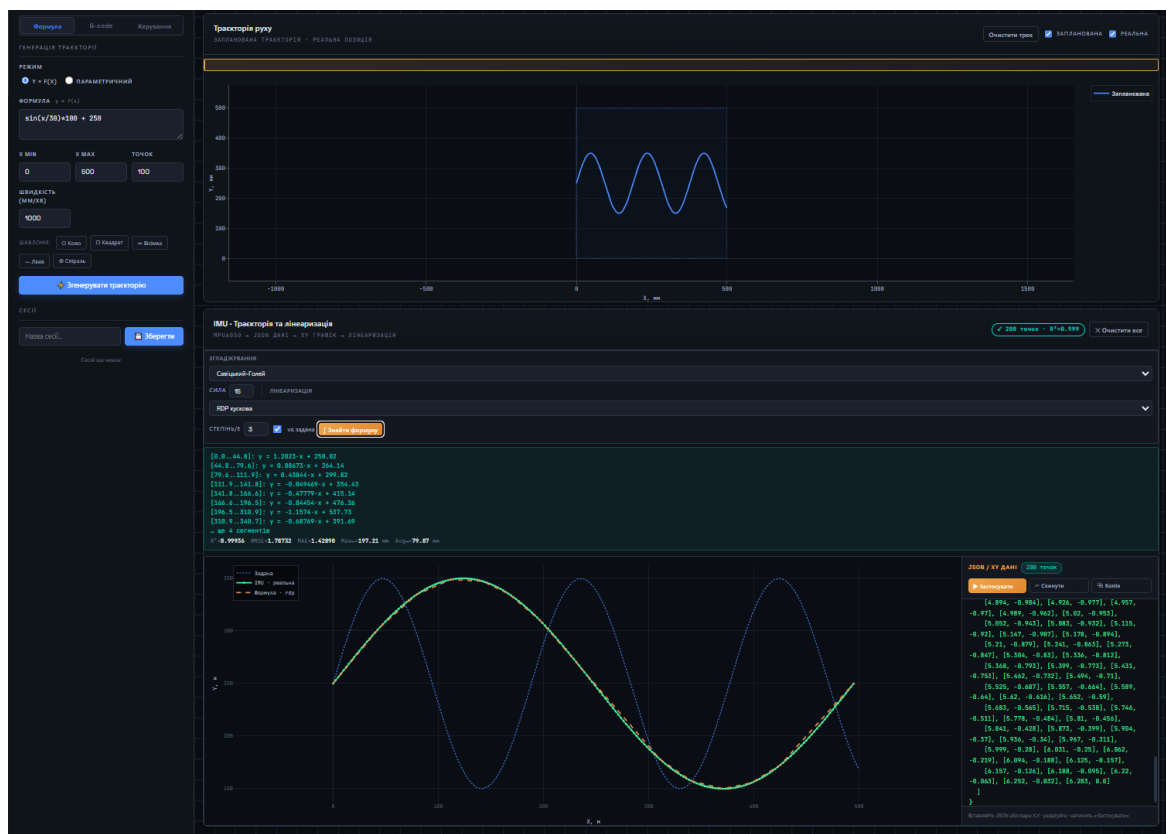


Рисунок 4.7 — Відновлена та апроксимована траєкторія руху ІМУ

4.5 Розробка програмного забезпечення для контролера

Програмне забезпечення нижнього рівня (прошивка мікроконтролерів) і верхнього рівня (серверний застосунок) утворюють єдиний програмний комплекс. Послідовність роботи така: оператор формує траєкторію у веб-інтерфейсі, сервер за потреби обрізає її до дозволеної зони й перетворює на G-code-програму, після чого надсилає рядки контролеру двигунів із підтвердженням виконання кожного. Паралельно модуль зчитування ІМУ за командами CALIBRATE/START/STOP виконує калібрування датчика, збір даних під час руху та обчислення траєкторії, яку повертає серверу у форматі JSON.

Протокол обміну з мікроконтролерами — текстовий рядковий. Багаторядковий JSON від модуля ІМУ збирається сервером до балансу дужок і лише потім розбирається, що робить приймання стійким до фрагментації повідомлень. Послідовність обміну з модулем зчитування ІМУ зведено в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 — Протокол обміну з модулем зчитування ІМУ

Команда / повідомлення	Напрямок	Зміст
CALIBRATE	сервер → ESP	запуск калібрування датчика
{"status":"ready"}	ESP → сервер	датчик готовий
START	сервер → ESP	початок збору під час руху
{"status":"moving"}	ESP → сервер	виявлено рух, збір даних
STOP / stopped	обидва	завершення збору, обробка
{"path":[[x,y],...]}	ESP → сервер	відновлена траєкторія

Генерація траєкторій на сервері підтримує готові шаблони (коло, квадрат, вісімка, лінія, спіраль) і користувацькі формули — явний вигляд $y = f(x)$ та параметричний ($x(t)$, $y(t)$). Вирази обчислюються у захищеному середовищі, де дозволено лише математичні функції. Сформована послідовність точок перетворюється на G-code-програму. Перед запуском сервер обчислює попередню оцінку програми: загальну довжину шляху, кількість рухів та орієнтовний час виконання з урахуванням розгону й гальмування. Налаштування й сесії вимірювань зберігаються у файли, підтримується механізм профілів конфігурацій.

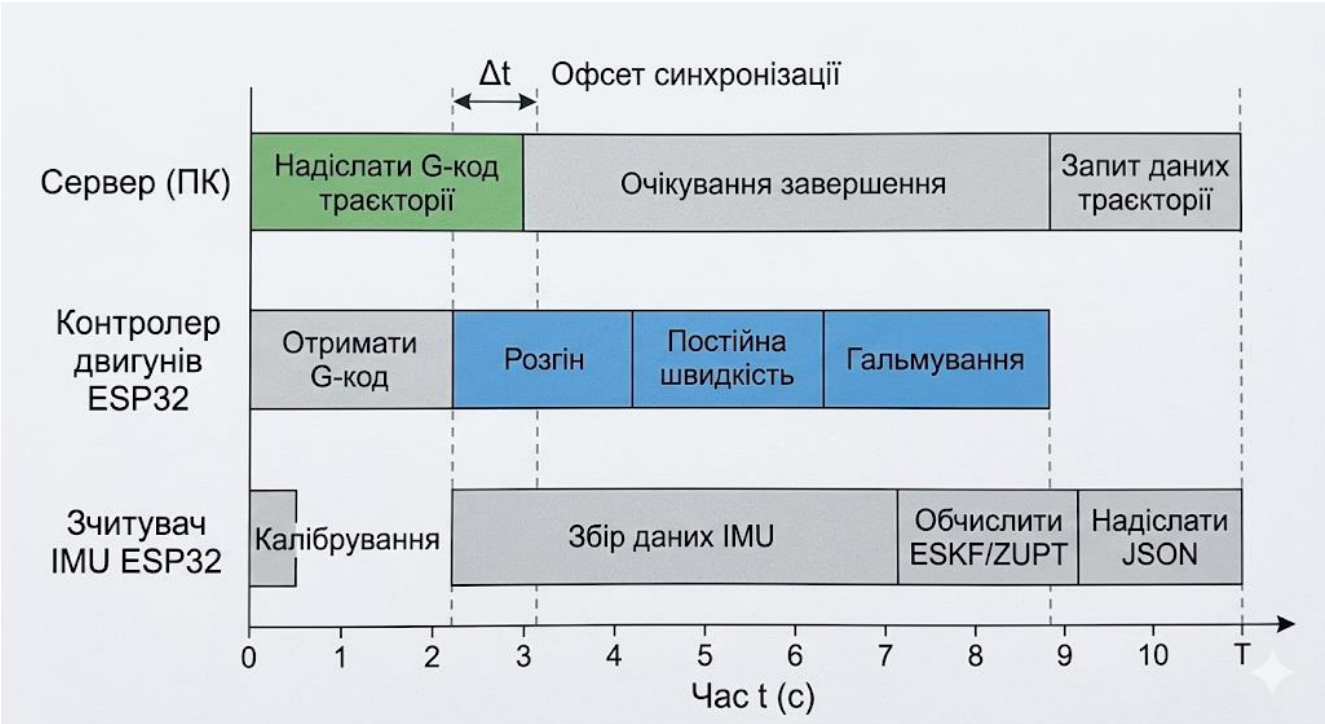
Архітектурно серверний застосунок побудовано за модульним принципом. Кожному фізичному пристрою (контролеру двигунів та модулю ІМУ) відповідає програмний об'єкт-драйвер, що інкапсулює роботу з послідовним портом, чергу команд і розбір відповідей; це дозволяє однаково обробляти різні пристрої та легко додавати нові. Логіку генерації й обробки траєкторій винесено в окремі модулі, незалежні від способу зв'язку, що спрощує їх тестування. Обмін між веб-інтерфейсом і сервером організовано за принципом опитування: інтерфейс періодично запитує оновлення стану й нові дані, а сервер повертає лише зміни, що зменшує обсяг переданих даних. Такий підхід забезпечує достатню чутливість інтерфейсу без складних механізмів двостороннього зв'язку.

Повний цикл роботи комплексу узагальнено такий: під'єднання обох пристроїв і базування осей → калібрування датчика ІМУ у статичному положенні → задання еталонної траєкторії у веб-інтерфейсі та її візуальна перевірка → обрізання траєкторії до робочої зони й формування G-code → синхронний запуск руху й збору даних ІМУ → відпрацювання траєкторії контролером з

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		67

підтвердженням кожного рядка → завершення руху, обчислення відновленої траєкторії модулем IMU та її передавання серверу → апроксимація й порівняння заданої і відновленої траєкторій, обчислення показників похибки → збереження результатів у сесію. Така послідовність повністю автоматизує процес калібрування й робить його відтворюваним.

Часову узгодженість дій контролера двигунів і модуля IMU під час одного циклу вимірювання ілюструє діаграма на рисунку 4.5. Сервер запускає збір даних IMU практично одночасно з початком руху, що дозволяє зіставити записані покази з відомою у часі заданою траєкторією. Точність такої програмної синхронізації обмежена затримками передавання по USB; для застосувань, де потрібна вища точність зіставлення, передбачено напрям подальшого розвитку —



апаратну синхронізацію за спільною часовою міткою[6-7].

Рисунок 4.8 — Часова діаграма циклу вимірювання

Висновки до розділу

Обґрунтовано вибір технічних засобів автоматизації: інерціального модуля MPU6050 як первинного перетворювача, крокових двигунів NEMA17 із драйверами DRV8825 як виконавчих пристроїв та двох мікроконтролерів ESP32 (контролер двигунів і зчитувач датчика). Розподіл функцій між двома мікроконтролерами усуває взаємний вплив задач керування двигунами та зчитування ІМУ.

Розроблено проектні рішення нижнього рівня — контролер кроковими двигунами, сумісний за командами з GRBL, та модуль зчитування MPU6050 з відновленням траєкторії руху за допомогою DMP, фільтра Савіцького–Голея, фільтра Калмана у формі помилкового стану (ESKF) і корекції за нульовою швидкістю (ZUPT). Розроблено додаткові рішення (адаптивна корекція дрейфу, апроксимація траєкторій, можливість додавання енкодерів) та проектні рішення верхнього рівня — серверний застосунок на Python/Flask з обрізанням траєкторій алгоритмом Ліанга–Барскі та веб-інтерфейсом оператора.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						69
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній (бакалаврській) роботі розв'язано задачу моделювання та синтезу системи керування 2-координатним ХУ-столом для калібрування ІМУ, а також розроблено апаратно-програмний комплекс, що реалізує відтворення еталонних траєкторій і обробку сигналів інерціального модуля. Основні результати роботи такі.

Проаналізовано ХУ-стіл як об'єкт автоматичного керування: розкрито призначення установки й суть технологічного процесу калібрування, охарактеризовано об'єкт вимірювання (MPU6050), конструкцію та обладнання стола, обґрунтовано вибір параметрів контролю й регулювання та сформульовано вимоги до якості керування (точність $\pm 0,5$ мм, перерегулювання до 10 %, відсутність статичної похибки).

Побудовано математичну модель електромеханічної осі ХУ-стола, що враховує електричну й механічну динаміку крокового двигуна, тертя та ремінну передачу, а також двовимірну модель об'єкта з перехресним зв'язком між осями. Модель лінеаризовано в околі робочої точки й отримано передавальні функції (третього порядку з інтегруючою ланкою) та матричну модель у просторі станів.

Обчислено числові значення параметрів моделі для конкретних компонентів: радіус шківів GT2-20 — 6,366 мм, зведені моменти інерції $3,78 \cdot 10^{-5}$ та $2,57 \cdot 10^{-5}$ кг·м², електрична стала часу 1,87 мс, механічні сталі часу 0,26...0,38 с, статичний коефіцієнт 4,245 рад/(с·В).

Синтезовано систему керування з компенсатором перехресних зв'язків і регуляторами контурів положення за методом розміщення полюсів. Досліджено стійкість за критерієм Рауса–Гурвіца — систему встановлено стійкою за обома осями. Імітаційним моделюванням у MatLab підтверджено відповідність вимогам технічного завдання: перерегулювання не перевищує 10 %, час регулювання 0,4...1,0 с, статична похибка відсутня, точність позиціонування $\pm 0,5$ мм.

Розроблено проектну складову САК: обґрунтовано вибір технічних засобів автоматизації, спроектовано нижній рівень (контролер кроковими двигунами на ESP32/DRV8825, сумісний з GRBL, та модуль зчитування MPU6050 з

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						70
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

відновленням траєкторії за допомогою DMP, ESKF і ZUPT), додаткові рішення та верхній рівень (серверний застосунок на Python/Flask з обрізанням траєкторій алгоритмом Ліанга–Барскі та веб-інтерфейсом). Розроблено програмне забезпечення комплексу й засоби генерації тестових траєкторій.

Практичне значення роботи полягає у створенні працездатного, відтвореного на доступних компонентах комплексу, придатного для навчальних і дослідницьких задач у галузі інерціальних вимірювань і автоматизації. Напрямами подальших досліджень є додавання давачів зворотного зв'язку положення для замкненого керування, синхронізація даних IMU з положенням за апаратною часовою міткою та реалізація повного багатопозиційного калібрування з автоматичним обчисленням параметрів моделі датчика безпосередньо в застосунку.

Окрім зазначеного, перспективним є врахування у моделі нелінійних і розподілених чинників (пружності та люфту ремня, ефектів сухого тертя поблизу нульової швидкості), що дозволить точніше описати поведінку системи в режимах розгону й реверсу та, за потреби, синтезувати складніші закони керування. Цікавим напрямом є також застосування комплексу для порівняльного дослідження різних алгоритмів обробки сигналів IMU (фільтрів орієнтації, методів пригнічення дрейфу) на однакових еталонних траєкторіях, що перетворює стенд на дослідницьку платформу. Розширення набору тестових траєкторій і автоматизація серій вимірювань дозволять накопичувати статистично представницькі набори даних для оцінювання характеристик інерціальних датчиків.

					БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ	Арк.
						71
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ НА ДЖЕРЕЛА

1. Горбійчук М. І. Моделювання об'єктів та систем керування в нафтовій та газовій промисловості : навч. посібник : у 3 ч. Івано-Франківськ : Факел, 1999. 603 с.
2. Горбійчук М. І. Математичне моделювання на ЕОМ технологічних об'єктів : навч. посібник. Івано-Франківськ : Факел, 2001. 240 с.
3. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. Київ : Либідь, 1997. 544 с.
4. Acarnley P. P. Stepping Motors: A Guide to Theory and Practice. 4th ed. London : IET, 2002. 280 p.
5. Горбійчук М. І., Пістун Є. П. Числові методи і моделювання на ЕОМ : навч. посібник. Івано-Франківськ : Факел, 2010. 409 с.
6. Ogata K. Modern Control Engineering. 5th ed. Prentice Hall, 2010. 905 p.
7. MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification : Rev. 3.4 / InvenSense Inc. 2013. 52 p.
8. DRV8825 Stepper Motor Controller IC : Datasheet (SLVSA73F) / Texas Instruments. 2014. 39 p.
9. ESP32 Series Datasheet : Version 4.3 / Espressif Systems. 2023. 65 p.
10. Grbl – open-source G-code parser and CNC controller. URL: <https://github.com/grbl/grbl> (дата звернення: 15.05.2026).
11. Sola J. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.02508> (дата звернення: 20.05.2026).
12. Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures. Analytical Chemistry. 1964. Vol. 36, No. 8. P. 1627–1639.

					<i>БР.АКП-17.00.00.000 ПЗ</i>	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		72

Додатки

Додаток А

Лістинг серверного застосунку (фрагменти)

Нижче наведено фрагмент обрізання відрізка руху до прямокутної робочої зони за алгоритмом Ліанга–Барскі та фрагмент безпечного обчислення користувачької формули траєкторії (мова Python, застосунок на Flask).

```
# --- обрізання відрізка до зони (алгоритм Ліанга-Барскі) ---
def clip_segment_to_rect(x0, y0, x1, y1, rect):
    dx, dy = x1 - x0, y1 - y0
    p = [-dx, dx, -dy, dy]
    q = [x0 - rect['x_min'], rect['x_max'] - x0,
         y0 - rect['y_min'], rect['y_max'] - y0]
    t_min, t_max = 0.0, 1.0
    for i in range(4):
        if abs(p[i]) < 1e-12:
            if q[i] < 0:
                return None
        else:
            t = q[i] / p[i]
            if p[i] < 0:
                t_min = max(t_min, t)
            else:
                t_max = min(t_max, t)
    if t_min > t_max:
        return None
    return (x0 + t_min*dx, y0 + t_min*dy,
            x0 + t_max*dx, y0 + t_max*dy)

# --- безпечне обчислення формули траєкторії ---
def safe_eval(expression, variables):
    namespace = {'**SAFE MATH NAMES', **variables, '__builtins__': {}}
    return eval(expression, namespace)

def generate_formula_xy(expr_x, expr_y, t0, t1, n):
    xs, ys = [], []
    for k in range(n):
        t = t0 + (t1 - t0) * k / (n - 1)
        xs.append(safe_eval(expr_x, {'t': t}))
        ys.append(safe_eval(expr_y, {'t': t}))
    return xs, ys
```

Додаток Б

Лістинг прошивки модуля зчитування IMU (фрагменти)

Нижче наведено фрагмент реалізації фільтра Калмана у формі помилкового стану (ESKF) з корекцією за нульовою швидкістю (ZUPT) для модуля зчитування MPU6050 (мова C++, фреймворк Arduino, мікроконтролер ESP32).

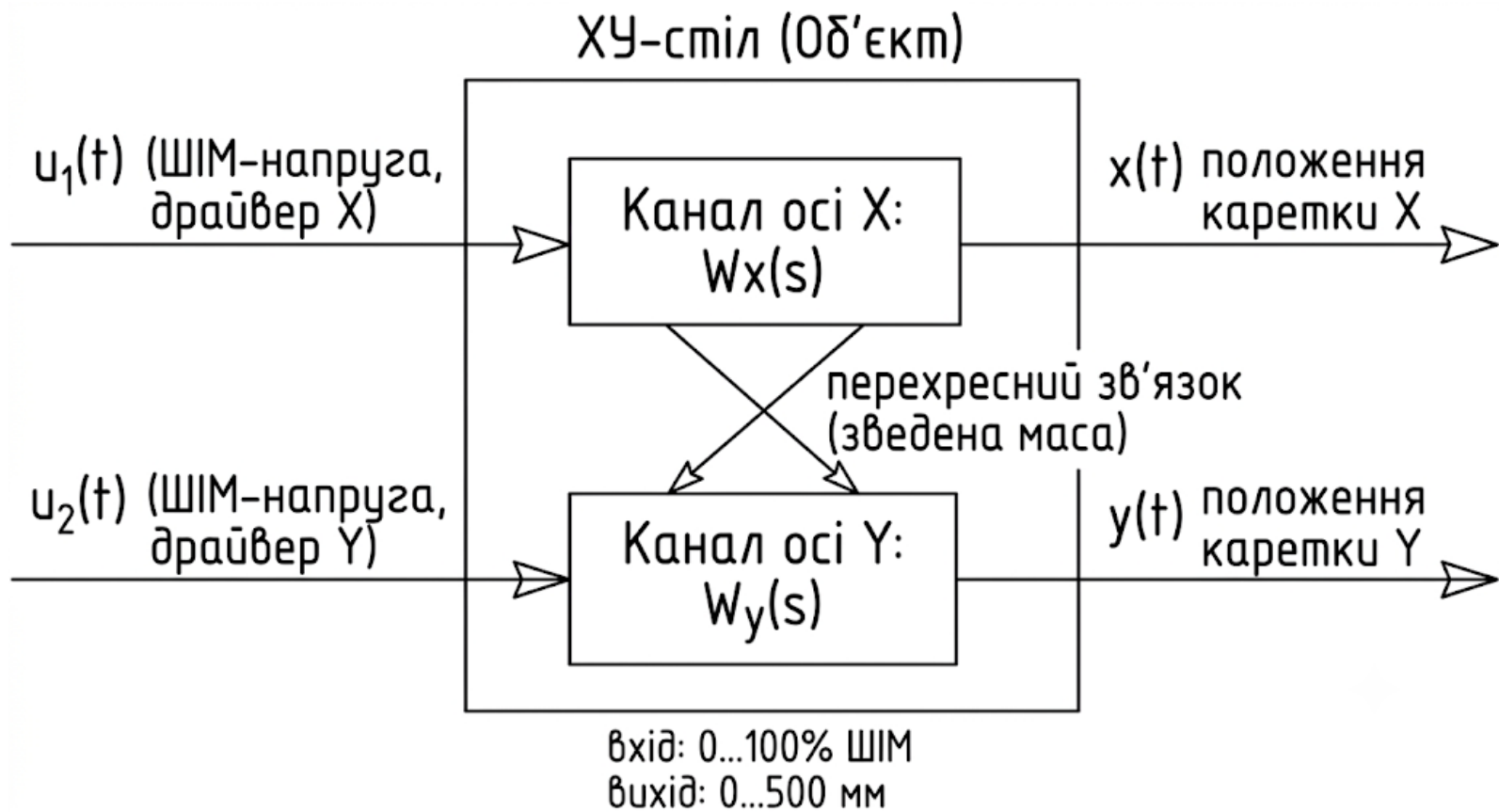
```
struct ESKF {
    float vx = 0, vy = 0;           // оцінки швидкості
    float bx = 0, by = 0;           // оцінки зміщення прискорення
    float Pvx = 1, Pvy = 1;         // коваріації швидкості
    float Pbx = 0.01f, Pby = 0.01f; // коваріації зміщення

    void predict(float ax, float ay, float dt) {
        float lax = ax - bx, lay = ay - by;
        vx += lax * dt; vy += lay * dt;
        Pvx += Q_ACC * dt * dt;
        Pvy += Q_ACC * dt * dt;
        Pbx += Q_BIAS * dt;
        Pby += Q_BIAS * dt;
    }

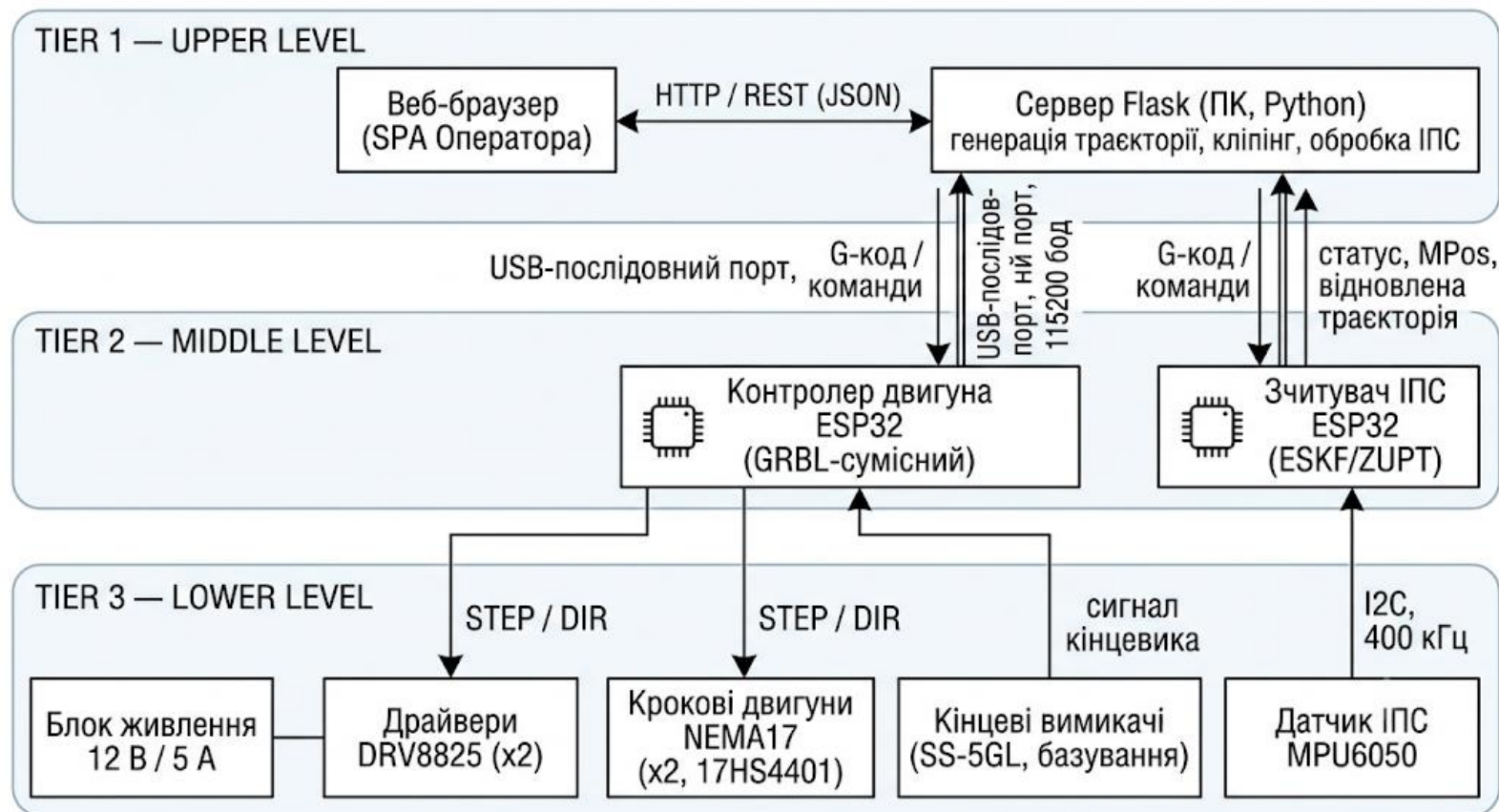
    void updateZUPT() { // корекція за нульовою швидкістю
        float Kx = Pvx / (Pvx + R_ACC);
        float Ky = Pvy / (Pvy + R_ACC);
        vx -= Kx * vx; vy -= Ky * vy;
        Pvx *= (1 - Kx); Pvy *= (1 - Ky);
    }

    void hardZUPT() { vx = vy = 0; Pvx = Pvy = 0.001f; }
    void reset() { vx = vy = 0; bx = by = 0;
                  Pvx = Pvy = 1; Pbx = Pby = 0.01f; }
} eskf;

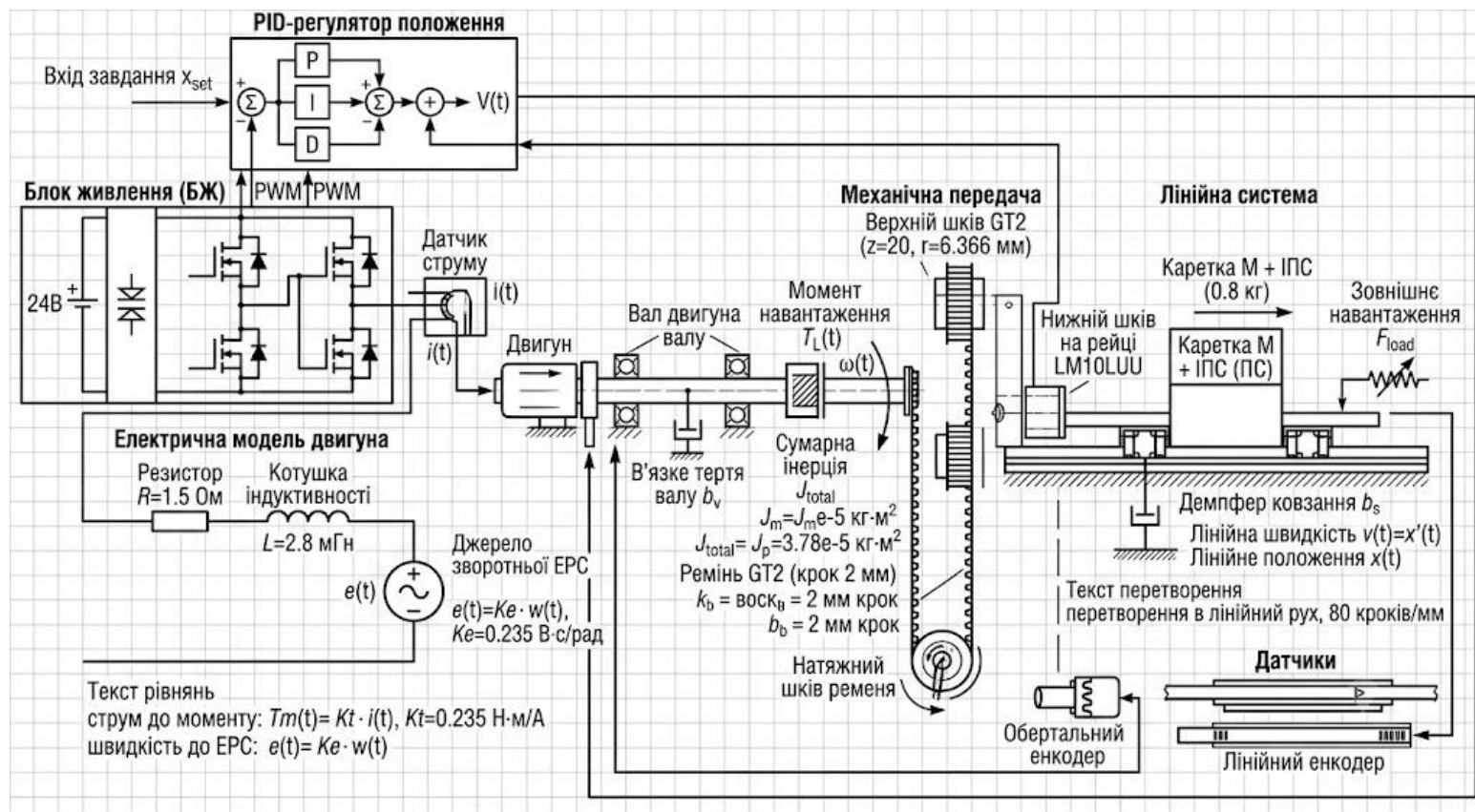
// перехід прискорення у нерухомі координати за кватерніоном
void worldAccel(Quaternion &q, float ax, float ay,
               float &wx, float &wy) {
    wx = ax*(1 - 2*(q.y*q.y + q.z*q.z))
        + ay*2*(q.x*q.y - q.w*q.z);
    wy = ax*2*(q.x*q.y + q.w*q.z)
        + ay*(1 - 2*(q.x*q.x + q.z*q.z));
}
```



					БР.АКП – 17.00.00.000 01						
					Автоматизоване управління механічною системою з діагностування акселерометра	Літера			Маса	Масштаб	
	Розробив	Лудчак Я.Я.									
	Перевірів	Прошок В.В.									
	Т. Контроль										
	Рецензент	Чинур І.І.				Арк.	1	Аркушів		3	
					Схема об’єкта керування ХУ-стола	АКП-22-1, ІФНТУНГ					
	Н. Контроль	Кучмистенко О.В.									
	Затвердив	Лагойда А.І.									



					БР.АКП – 17.00.00.000 02						
Змн.	Лист	№ докум.	Підпис	Дата	Автоматизоване управління механічною системою з діагностування акселерометра			Літера		Маса	Масштаб
Розробив	Лудчак Я.Я.										
Перевірів	Прошок В.В.										
Т. Контроль											
Рецензент	Чинур І.І.							Арк.	2	Аркушів	3
					Схема системи керування ХУ-стола			АКП-22-1, ІФНТУНГ			
Н. Контроль	Кучмистенко О.В.										
Затвердив	Лагойда А.І.										



					БР.АКП – 17.00.00.000 03			
Змн.	Лист	№ докум.	Підпис	Дата	Автоматизоване управління механічною системою з діагностування акселерометра	Літера	Маса	Масштаб
Розробив	Лудчак Я.Я.							
Перевірив	Процок В.В.							
Т. Контроль								
Рецензент	Чигур І.І.							
Н. Контроль	Кучмистенко О.В.				Схема електромеханічної системи	Арк.	3	Аркушів 3
Затвердив	Лагойда А.І.					АКП-22-1, ІФНТУНГ		